

LEONARD SMITH

KAOS

KÜLTÜR KİTAPLIĞI 139

DOST

KÜLTÜR KİTAPLIĞI: 139

D

Leonard Smith

Oxford'daki Pembroke College'te matematik dersleri veren Smith, London School of Economics'te istatistik profesörü ve aynı okuldaki Zaman Serileri Analiz Merkezi'nin yöneticisidir.

Smith, Leonard
Kaos
ISBN 978-975-298-511-7 / Türkçesi: Hakan Gür
Nisan 2014, Ankara, 230 sayfa
Kültür Kitaplığı: 139; Bilim: 7

Kaos

Leonard Smith

DOST

ISBN 978-975-298-511-7

Chaos
Leonard Smith

Birinci baskı, Nisan 2014, Ankara

Türkçesi, Hakan Gür

Teknik hazırlık, Mehmet Dirican

Erdal Akalın - Dost Kitabevi
Sertifika No: 12386
Paris Cad. No: 76/7, Kavaklıdere 06680 Ankara
Tel: (0.312) 435 93 70 • Faks: (0.312) 435 79 02
www.dostyayinevi.com • bilgi@dostyayinevi.com

Baskı, Pelin Ofset Ltd. Şti.
Sertifika No: 16157
İvedik Organize Sanayi Bölgesi, Matbaacılar Sitesi
588. Sokak no: 28-30 Yenimahalle / Ankara
Tel: (0.312) 395 25 80-81 • Faks: (0.312) 395 25 84

İÇİNDEKİLER

Gerçek bir fizikçi, gerçek bir dost
Dave Paul Debeer'ın anısına

TEŞEKKÜR

Bu kitabı yazmak, elbette, ebeveynlerim olmasaydı olanaksız olacaktı, ama ben onların inanç, kuşku ve umutları ile a, b ve c'nin sevgi ve sabrına çok daha fazlasını borçluyum. Meslekî açıdansa kaosun babalarından biri ve benim de tez danışmanım, akıl hocam ve dostum Ed Spiegel'e çok şey borçluyum. Ayrıca, bu fikirlerden bazılarını Jim Berger, Robert Bishop, David Broomhead, Neil Gordon, Julian Hunt, Kevin Judd, Joe Keller, Ed Lorenz, Bob May, Michael Mackey, Tim Palmer, Itamar Procaccia, Colin Sparrow, James Theiler, John Wheeler ve Christine Ziehmann'la tartışma şansı bularak onlardan da çok yararlandım. Oxford'daki Pembroke College'in öğretim üyeleriyle yaptığım tartışmalar ve bu kişilerin sağladığı destek için de teşekkür ediyorum. En son ve en çok öğrencilerime teşekkür etmek isterim – onlar kim olduklarını biliyorlar. Kulak misafiri olduğum şöyle bir konuşmaya nasıl bir tepki vermem gerektiğine hâlâ emin değilim: "Onun Lenny'nin öğrencisi olduğunu biliyor musun?" "Ya, şimdi anlaşıldı." Kusura bakmayın dostlar: suç Spiegel'de.

ÖNSÖZ

Bunu izleyen sayfalarda tanıtılan "kaos" matematik ve bilim alanlarındaki görüngüyü yansıtır; bu dizgelerde (hiçbir hile olmaksızın) günümüzde görülen küçük değişiklikler gelecekte büyük değişikliklere neden olur. Eğer her şey rasgele gerçekleşseydi ya da eğer her şey sonsuza kadar sürekli olarak düzensiz gerçekleşseydi, işte, bu hile olurdu. Bu kitapta üç basit sınırlamadan kaynaklanan ve hayranlık uyandırıcı denli zengin bir malzemenin izi sürülmektedir; biz bunlara *duyarlılık*, *determinizm* ve *yinelenme* demekteyiz. Bu kısıtlamalar matematiksel kaosa yol açar, yani rasgele gibi görünen ama rasgele olmayan davranışa. Tahmin yürütmenin etkin bileşeni olduğu varsayılan bir parça *belirsizlik* eklendiğinde, kaos, dünyanın doğasına ilişkin asırlar öncesine uzanan bir tartışmayı yeniden alevlendirir.

Bu kitap terimlerin geçtikleri ilk yerde açıklanmaları açısından kendi içinde bir bütünlük taşımaktadır. Amacım kaosa ilişkin ne, nerede ve nasıl sorularını açıklamak, ileri düzeyde matematiksel bilgi gerektiren "neden" sorusuna ilişkin konuları ise bir kenarda bırakmak. Neyse ki, kaos ve tahmin yürütmenin betimlenmesi görsel, geometrik

bir kavrayışa olanak vermekte; kaos incelememiz bizleri denklemlerin olmadığı saf tahmin edilebilirliğe götürecek ve hava, iklim ve gerçek dünyayla bağlantılı diğer görüngüler hakkındaki etkin bilimsel araştırmaların sorduğu soruları ortaya koyacak.

Günümüzde kaos bilimine yönelik popüler ilgi, görelilik kuramının on yıllar boyunca etkili ve popüler bir ilgi alanı olmayı sürdüreceği yüz yıl öncesinde bilime duyulan ilginin aniden artmasından farklı bir biçimde gelişti. Bilimin matematiksel kaosu incelemesine toplumun verdiği tepki neden farklı oldu? Belki, farklılıklardan biri, çok küçük değişikliklerin bazen büyük etkiler yaratabileceğini çoğumuzun zaten biliyor olmasıydı. Bugün "kaos" olarak adlandırılan kavramın kökeni hem bilimkurguda hem de bilimsel gerçekte yatar. Aslına bakılırsa, bu görüşler gerçek olarak kabul edilmeden çok önceleri bilimkurgu alanına yerleşmişti bile: kimbilir, belki de bilim insanları yadsımayla uğraşırken halk kaosun taşıdığı anlamlar konusunda uzmanlaşmıştı bile. Önemli bilim insanları ile matematikçiler kaosun gelişini önceden görebilecek kadar cesaret ve sezgiye sahipti, ama yakın zamanlara kadar temel bilim dallarının konuya müspet yaklaşmak için iyi bir çözüme gereksinimleri vardı: fraktal nesneler ve düzensiz eğriler hem bir olağandışılık olarak hem de kötü dile getirilmiş soruların göstergesi olarak kabul edilmekteydi. Bir matematikçi açısından, insanın meslek yaşantısının kötü biçimde dile getirilmiş sorulara adandığı suçlamasından daha utandırıcı bir şey olamaz. Bazı bilim insanları sonuçları kuramsal açıdan bile yeniden türetilemeyecek problemlerden uzak durmaya devam ediyor. Kaosun ge-

rektirdiği çözümler ancak ve ancak çok yakın zamanlarda bilim çevrelerinde geniş düzeyde kabul görür hale geldi ve sıradan insanlar da genellikle "uzmanların" kullandığı "ben dememiş miydim?" sözünü kullanma mutluluğuna erişti. Bu, neden kaosun –matematik ve bilim alanlarından beslenmesine karşın– meteoroloji ve astronomi gibi uygulamalı bilimlerde kök saldığını da açıklar. Uygulamalı bilimlerde gerçekliği anlama ve tahmin etme arzusu hâkimdir; bu arzu günümüzün biçimsel matematiğinin her türlü ayrıntısını aşmaktadır. Bu yaklaşım, oluşturduğumuz dünya modelleri ile gerçek dünya arasındaki ayrımda –bu ikisini birbirine karıştırmadan– bir köprü oluşturacak, matematik ile gerçekliği birbirinden ayırıp bu yolla matematiğin uzamını genişletecek zor bulunur bireylere gereksinim duyar.

Kültür Kitaplığı yayınlarının tümünde olduğu gibi, sayfa sayısının kısıtlı olması kimi araştırma programlarının özetlenmesini ya da tamamen çıkarılmasını gerektirmekte; bir dizi sığ betimleme yerine, bağlam içinde yinelenen kavramları sunmayı yeğlemekteyim. Burada ele almadığım çalışmaları gerçekleştirenlerden özür dilerken, benim açımdan çok ilginç olan konularla okuyucu açısından ilginç kılabileceğim konular arasında bir ayrım yapmama olanak sağlayan Luciana O'Flaherty (editörüm), Wendy Parker ve Lyn Grove'a da teşekkür ederim.

Kitabın kullanımına ilişkin notlar

Kitapta bir parça matematik yer alsa da, X=2'den daha karmaşık hiçbir denklik bulunmamaktadır. Alana özgü te-

rimleri bir kenara bırakmak ise o kadar kolay değil. Yatık yazılı terimleri öğrenmeniz gerekecek; bu sözcüklerin kısa tanımları kitabın sonundaki sözlükçede bulunabilir. Hem vurgu amacıyla hem de kitap boyunca pek fazla yinelenmeyen alana özgü terimleri göstermek için *yatık* yazma biçemi kullanılmaktadır.

Aklınıza takılabilecek soruları internet üzerinde http://cats.lse.ac.uk/forum adresindeki VSI Forum'da tartışabilirsiniz. Bu terimler hakkında daha fazla bilgi http://www.wikipedia.org adresindeki Wikipedia'da ve http://cats.lse.ac.uk/predictability adresinde bulunabilir.

I. Bölüm

KAOSUN ORTAYA ÇIKIŞI

Çamurun içinde yeşil, altın sarısı ve siyah renkleriyle parıldayan bir kelebek vardı – çok güzel ve cansız. Yere düşüvermişti, ipince bir varlık, dengeleri altüst edebilecek; önce bir dizi küçük dominoyu, ardından büyük dominoları ve sonra da kocaman dominoları. Zaman'ın içerdiği tüm yıllar boyunca uzanan dominoları devirebilecek küçücük bir varlık.

Ray Bradbury (1952)

Matematiksel kaosun üç temel niteliği

"Kelebek etkisi" kaosun popüler bir sloganı haline geldi. Fakat küçük ayrıntıların bazen büyük etkiler yaratması gerçekten de o kadar şaşırtıcı bir şey mi? Bazen artık kalıplaşmış bu küçük ayrıntı, içinde kelebek olan bir evrenle bu evrene tıpatıp benzeyen ama içinde kelebek olmayan alternatif bir evren arasındaki fark olarak algılanmakta;

bu küçücük fark sonucunda bu iki dünya kısa süre içinde birbirinden inanılmaz düzeylerde farklı hale gelecektir. Bu kuramın matematiksel karşılığı *duyarlı bağımlılık* olarak bilinir. Kaos dizgeleri duyarlı bağımlılığın yanı sıra başka iki özellik daha taşır: bu dizgeler *determinist* ve *doğrusalsız* özelliklidir. Bu bölümde bu sözcüklerin ne anlama geldiğini ve bu kavramların bilim alanına nasıl yerleştiğini göreceğiz.

Kaosun önemli olmasının kısmî bir nedeni, tutarsız dengeleri betimleme, anlama ve hatta belki de tahmin etme yeteneğimizi geliştirerek bu dizgelerle başa çıkmamıza yardım etmesidir. Hatta, çürüteceğimiz kaos mitlerinden birine göre, kaos tahminde bulunmayı gereksiz bir eylem haline getirir. Alternatif ama bir o kadar popüler bir kelebek öyküsünde, bir yanda bir kelebeğin kanatlarını çırptığı bir evren, bir yanda da çırpmadığı bir evren bulunmaktadır. Bu küçücük fark, bu iki dünyanın yalnızca birinde bir kasırganın oluşması anlamını taşır ve belirsizlik ile kestirimi ilişkilendirir: biz bu iki dünyadan hangisindeyiz? Matematiksel modellerimizde belirsizliğin böylesine hızlı gelişmesini sağlayan mekanizmalara verilen addır kaos. Belirsizliği artırıp tahminleri allak bullak eden kaos imgesi bu kitap boyunca sık sık karşımıza çıkacak.

Kaosun izleri

Kaos uyarıları her yerde –hatta çocuk tekerlemelerinde bile– mevcuttur. Tek bir çivinin eksikliği yüzünden koskoca bir krallığın yitirilebileceği uyarısı 14. yüzyıla

kadar uzanır; ünlü çocuk tekerlemesinin aşağıda verilen versiyonu Benjamin Franklin'in 1758'de yayımladığı *Poor Richard's Almanac*'ta yer almaktaydı:

Tek bir çivisi olmayınca bir nal düştü,
Tek bir nalı olmayınca bir at düştü,
ve bir atı olmayınca binici düştü,
düşman onu alaşağı edip hakladı,
Nalda eksik tek bir çivi yüzünden hem de.

Bizler istikrarsızlığın tohumlarını kaosla açıklamaya değil, ilk tohum atıldıktan *sonra* belirsizliğin büyümesini betimlemeye çalışırız. Elimizdeki örnekte, nal çivisinin yitirilmiş olduğu gerçeğini değil de binicinin nasıl olup da tek bir çivinin eksikliği yüzünden düştüğünü açıklayarak. Aslında, elbette, bir çivi ya vardı ya da yoktu. Ama, eserde anlatıldığına göre, eğer çivi düşmeseydi krallık da yıkılmayacaktı. Kaos dizgelerinin niteliklerini genellikle bir parça farklı durumların etkisini göz önünde bulundurarak inceleyeceğiz.

Astronomi, meteoroloji, nüfus biyolojisi ve iktisat gibi uygulamalı bilim alanlarında kaos incelemeleri yaygındır. Dünya hakkında nicel kestirimler yanında tutarlı gözlemler yapan bilim alanları Isaac Newton'dan bu yana bizlere kaosun gelişimindeki temel oyuncuları sağladı. Newton yasalarına göre, güneş sisteminin geleceğini belirleyen şey, tamamen onun şu anki durumudur. Pierre Laplace bu determinist görüşü bilimde temel bir konuma yerleştirdi. Eğer bir dünyanın mevcut durumu geleceğini tamamen tanımlıyorsa, bu, o dünyanın determinist olduğu anlamı-

nı taşır. 1820'de, Laplace, günümüzde "Laplace şeytanı" olarak bilinen kavramı geliştirdi; bunu yaparken determinizmle prensipte kestirimde bulunma yeteneğini bilimde başarı kavramının ta kendisiyle ilişkilendirdi.

> Evrenin şu anki durumunu onun geçmişinin etkisi ve geleceğinin nedeni olarak görebiliriz. Belirli bir anda, doğayı harekete geçiren güçlerin yanı sıra doğayı oluşturan bütün unsurların bütün konumlarını bilen bir zihin düşünün: bu zihin bütün verileri analiz edebilecek kadar büyük olsa, o zaman, evrenin en büyük varlıklarının devinimleriyle en küçük atomun devinimlerini tek bir formülde birleştirirdi; böyle bir zihin açısından hiçbir şey belirsizlik taşımazdı ve tıpkı geçmiş gibi gelecek de gözlerinin önünde apaçık dururdu.

Dikkat ederseniz, Laplace, şeytanına üç özellik atfetmekteydi: Doğa yasalarını eksiksiz bilme ("bütün güçler"), evrenin kesin durumunun fotoğrafını çekebilme yeteneği ("bütün konumlar") ve sonsuz bir bilgi işleme kaynağı ("bütün bu verileri analiz edebilecek kadar büyük"). Laplace'ın kaosu açısından, kaos, kestirimin önünde bir engel oluşturmaz. Bu kitap boyunca bu yeteneklerin bir ya da daha fazlasını ortadan kaldırmanın etkilerini ele alacağız.

Newton zamanından 19. yüzyılın sonuna kadar bilim insanlarının çoğu aynı zamanda meteorolojiyle uğraşmaktaydı. Belirsizliğin hava tahminlerinde oynadığı role hava tahmin uzmanlarının duyduğu ilgi yüzünden kaos ve meteoroloji yakından bağlantılıydı. Benjamin Franklin'in me-

teorolojiye ilgisi onun fırtınalı bir havada uçurtmayla gerçekleştirdiği deneyin çok ötesindeydi. Hava koşullarının batıdan doğuya doğru ilerlediğinin farkına varıp bu kuramı Philadelphia'dan doğudaki kentlere mektuplar yazarak sınadığı bilinir. Gerçi mektuplar hava koşullarının değişmesinden çok sonraları yerine ulaşıyordu ama bunlar, hiç kuşkusuz, ilk hava tahminleri olarak kabul edilebilir. Laplace da atmosfer basıncının yüksekliğe bağlı olarak düştüğünü betimleyen yasayı keşfetmişti. Ayrıca, hata kuramına da önemli katkılarda bulundu: bir gözlem gerçekleştirdiğinde, ölçü matematiksel anlamda asla kesin olmadığı için, "Gerçek" değer açısından her zaman bir belirsizlik söz konusuydu. Bilim insanları genellikle bir gözlemdeki her türlü belirsizliğin kaynağı olarak *gürültü* denen şeyi gösterir ama gürültünün ne olduğunu da aslında tam olarak açıklamazlar; gürültü –ister bir masanın uzunluğu, ister bir bahçedeki tavşanların sayısı olsun– ölçmeye çalıştığımız şeyin görüntüsünü bulanıklaştıran şeydir. Gürültü *gözlemsel belirsizlik* durumunu doğurur ve gürültü için bir modele sahip olduğumuz anda da kaos küçük belirsizliklerin nasıl büyük belirsizlikler haline gelebileceğini anlamamıza yardım eder. Kaostan zor bela da olsa edinilebilmiş bilgilerin bazıları nicel bilimlerdeki belirsizlik dinamiğinde kaosun oynadığı rolün ya da rollerin netleştirilmesinde yatar. Kaos incelemeleri bizi tekrar tekrar geriye dönüp "Gerçek" değer kavramıyla ne demek istediğimizi yeniden incelemeye zorladıkça, gürültü kavramı da çok daha ilginç bir konu haline gelmekte.

Laplace'ın olabilirlik konulu kitabının yayımlanmasından yirmi yıl sonra, Edgar Allan Poe, bugün atmosferde

kaos adını verdiğimiz olguya ilk kez değindi. Yalnızca ellerimizi sallamanın tüm gezegende atmosferi etkileyebileceğini dile getirdi. Poe, ardından, Laplace'ın söylediklerini anımsatacak bir biçimde, dünya matematikçilerinin gitgide yayılıp sonsuza dek atmosferin durumunu değiştirecek bu el sallama "itiminin" ilerleyişini hesaplayabileceklerini belirtti. Elbette, ellerimizi sallayıp sallamamaya karar vermek bizim elimizde: özgür irade kaosa beslenebileceği bir diğer kaynak sağlamaktadır.

1831'de, Laplace'ın bilimi ile Poe'nun kurgusunun yayımlandığı tarihlerin tam ortasında, Kaptan Robert Fitzroy genç Charles Darwin'i keşif gezisine götürdü. Bu yolculukta yapılan gözlemler Darwin'i doğal seçilim kavramını oluşturmaya yönlendirdi. Evrim ile kaosun ortak noktaları sanıldığından daha fazladır. Birincisi, dil söz konusu olduğunda, "evrim" ve kaos hem açıklanacak olgulara hem de açıklamayı yapması beklenen kavramlara değinirken aynı anda kullanılır. Bu da çoğu zaman betimleme ile betimlenecek nesnenin birbirine karıştırılmasına yol açar (haritayla araziyi karıştırmak gibi). Bu kitapta, matematiksel modelleri bu modellerin betimlemeleri amaçlanan gerçeklikle karıştırmanın bu ikisine ilişkin tartışmaları bulanıklaştırdığını göreceğiz. İkincisi, daha derine inildiğinde, bazı ekosistemler sanki birer kaos dizgesiymişçesine evrimleşiyor olabilir – çevredeki küçük değişikliklerin pekâlâ büyük etkileri olabileceği gibi. Ayrıca, evrim, kaos tartışmalarına da katkı sağlar. Bu bölümün başındaki alıntı Ray Bradbury'nin "A Sound Like Thunder" başlıklı eserinden; bu eserde büyük av hayvanları peşinde koşan zaman gezginleri yanlışlıkla bir kelebeği öldürür ve döndüklerinde

geleceğin tamamen farklı bir yer haline geldiğini görür. Öyküdeki kişiler bir fareyi öldürmenin etkilerini, onun ölümünün yaratacağı etkinin yitirilecek onca fare, tilki ve aslan kuşağı boyunca katlanarak artışını hayal eder:

> Bütün o böcek, akbaba nesilleri ve milyarlarca yaşam biçimi kaosa ve yok olmaya sürüklenir. (...) Tek bir fareyi ayağınızla ezseniz sonsuzluk içinde en az Büyük Kanyon kadar iz bırakırsınız. Kraliçe Elizabeth asla doğmayabilir, Washington Delaware'i aşamayabilir, hatta Birleşik Devletler diye bir yer asla olmayabilir. Bu yüzden dikkat. Yolu izleyin. Asla yoldan çıkmayın!

Bilindiği gibi, birisi yoldan çıkıp yeşilli siyahlı küçük bir kelebeğin üstüne basar. Bu "acaba" deneylerini ancak ve ancak matematikte ya da yazın sanatının kurgusal alanlarında dikkate alabiliriz, çünkü elimizde gerçekliğin yalnızca tek bir tezahürü mevcut.

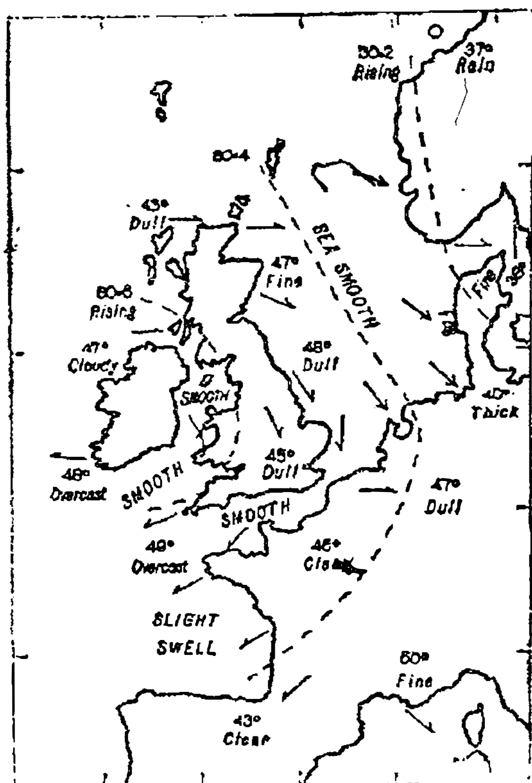
"Kelebek etkisi" teriminin kökeni, konuya uygun bir biçimde, gizemle kaplıdır. Bradbury'nin 1952 tarihli öyküsü, 1960'larda kaos konusunda yayımlanmış bazı makalelerden daha eski. Meteoroloji uzmanı Ed Lorenz bir zamanlar değişim unsuru olarak martıların kanatlarından söz ettiyse de bu konunun başlığı kendisine ait değildi. Onun bir kaos dizgesine ilişkin ilk bilgisayar temelli resimlerinden biri de bir kelebeği andırır. Ama, ister düşmüş bir nal çivisi, bir kelebek, bir martı ya da –daha yakın tarihlerde– Homer Simpson tarafından "ezilmiş" bir sivrisinek olsun, "küçük fark"ın canlı simgesi ne olursa olsun, küçük farklılıkların büyük etkileri olabileceği görüşü yeni değil-

dir. Küçük farklılıkların kökeni konusunda sessiz kalsa da, kaos, küçük bir farklılığın nasıl olup da hızla krallığı sarsan boyutlara ulaştığı hakkında bir betimleme sağlamaktadır ve bu nedenle de tahmin etme ve tahmin edilebilirlikle yakından ilişkilidir.

İlk hava tahminleri

Zamanın bütün gemi kaptanları gibi Fitzroy da hava durumuyla yakından ilgileniyordu. Gemilerde daha kullanışlı bir barometre geliştirmişti – uydu görüntüleri ve telsiz raporlarından yoksun bir kaptan için barometrenin taşıdığı değer inkâr edilemez. Büyük fırtınalar düşük atmosfer basıncıyla bağlantılıdır; basınca ve dolayısıyla basıncın ne kadar hızlı değiştiğine ilişkin nicel bir değer sunan barometre ufkun ötesinde neler olduğu konusunda yaşam kurtaracak bilgiler sağlayabilir. Daha sonraları, Fitzroy, Birleşik Krallık Meteoroloji Bürosu adını alacak olan büronun ilk başkanı oldu. Britanya genelinde gözlemler derleyip mevcut hava koşulları konusunda özet raporlar yayınlamak için henüz yeni olan telgraftan yararlandı. Telgraf ilk kez olarak havaya ilişkin bilgilerin havadan önce ulaşmasına olanak sağladı. Newton yasalarını kullanarak iki yeni gezegen keşfetmesiyle ünlenen Fransız Le Verrier ile çalışıp gerçek zamanlı hava tahmini konusunda ilk uluslararası çabalara katkı sağladı. Bu tahminler Darwin'in kuzeni olan ve 1875'te *London Times*'da ilk hava durumu haritasını –Şekil 1– gerçekleştiren istatistikçi Francis Galton tarafından şiddetle eleştirildi.

WEATHER CHART, MARCH 31, 1875.



The dotted lines indicate the gradations of barometric pressure. The variations of the temperature are marked by figures, the state of the sea and sky by descriptive words, and the direction of the wind by arrows—barbed and feathered according to its force. ⊙ denotes calm.

1. Bir gazetede yayımlanmış ilk hava durumu haritası. Francis Galton'ın hazırladığı harita 31 Mart 1875'te *London Times*'da yer aldı.

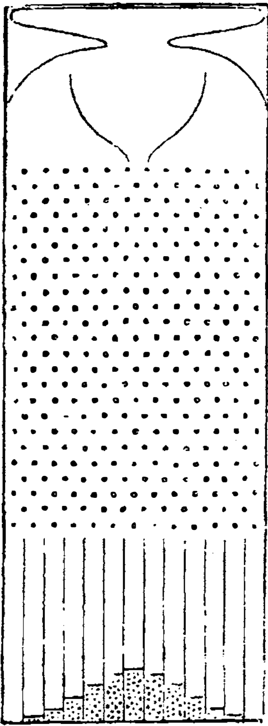
Eğer gözlem hatalarından kaynaklanan belirsizlik kaosun büyüteceği tohumu sağlamaktaysa, o zaman, bu tür belirsizlikleri anlamak kaosla başa çıkmamıza yardım edebilir. Laplace gibi Galton da en geniş anlamıyla "hatalar kuramı" ile ilgileniyordu. Çoğu zaman ölçüm hatalarını gösterir gibi görünen ve her yerde karşımıza çıkan "çan eğrisi"ni örneklemek için, Galton, bugün "Galton Kutusu" olarak bilinen bir "beşli diziliş kutusu" geliştirdi; bunun en bilinen versiyonu Şekil 2'de solda yer almakta. Beşli diziliş kutusuna saçma taneleri atan Galton, her bir saçma tanesinin karşısına çıkan her bir çivinin soluna ya da sağına gitmesinin 50:50 şans dâhilinde olduğu, saçma tanelerinin çan eğrisi biçiminde dağılım göstermesine yol açan bir raslantısal dizge oluşturdu. Galton Kutularına IX. Bölüm'de geri döneceğiz, ama çan eğrilerinden alınan raslantısal sayıları gürültü için bir model olarak bundan çok daha önce sık sık kullanacağız. Bu çan eğrisi Şekil 2'nin solundaki Galton Kutusu'nun dip bölümünde görülebilir; Şekil 10'un üst bölümlerinde bunun daha düzgün bir versiyonu karşımıza çıkacak.

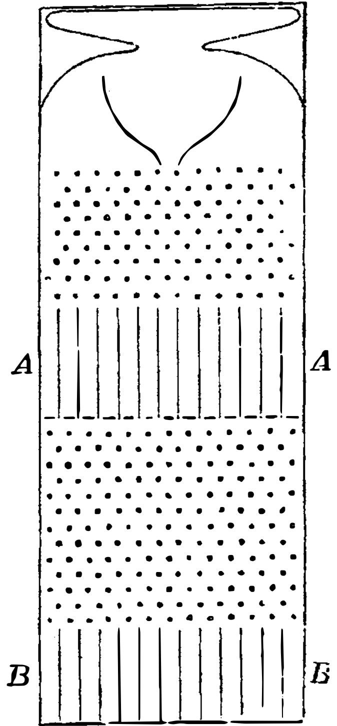
Kaos incelemeleri neredeyse iki yüzyılın ardından hava tahminlerinin neden güvenilmez olmayı sürdürdükleri hakkında yepyeni fikirler sağlamaktadır. Yarınki hava üzerinde büyük etkileri olan bugünün havasındaki küçük ayrıntıları ıskalamamızdan ötürü mü? Yoksa yöntemlerimiz Fitzroy'un yöntemlerinden daha iyi olsalar da kusursuz olamadığı için mi? Poe'nun kelebek etkisini atmosfer koşullarıyla örnekleyişini, bilimin –eğer kusursuz ise– fiziksel nitelikli her şeyi tahmin edebileceği fikri tamamlar. Ancak, duyarlı bağımlılığın ayrıntılı hava tahminlerini

zorlaştıracağı ve hatta belki de fiziğin alanını sınırlandıracağı gerçeği bir süredir hem bilim hem de kurgu tarafından kabul edilmekte. 1874'te fizikçi James Clerk Maxwell herhangi bir bilim alanındaki muhtemel bir başarıya bir parça orantının eşlik edeceğini belirtmekteydi:

> Bu durum ancak başlangıç koşullarındaki küçük değişimler dizgenin nihai durumunda küçük değişimler ürettiğinde geçerlidir. Pek çok fiziksel olguda bu koşul karşılanır; ama bazı durumlar var ki, ilk baştaki küçük bir değişim dizgenin nihai durumunda büyük değişiklikler yaratabilir – tıpkı "ray puntoları"nın yerlerinin değiştirilmesinin bir trenin normal rotasında gitmek yerine başka bir trenle çarpışmasına neden olması gibi.

Bu örnek, "bir kerelik" bir duyarlılık söz konusu olduğu için, kaos açısından tipik sayılmaz; ama, yine de, duyarlılık ile belirsizlik arasında ayrım yapmakta işe yarıyor: puntoların konumları ya da hangi trenin hangi rayda olduğu konusunda bir belirsizlik olmadığı sürece bu duyarlılık tehdit oluşturmamaktadır. Rocky Mountains'da, bir tepe yakınlarında bir bardak su döktüğünüzü düşünün. Bu kıta çizgisinin bir yanında su Colorado Irmağı'na karışıp Pasifik Okyanusu'na ulaşır; diğer yanda da Mississippi Irmağı yoluyla Atlantik Okyanusu'na gider. Bardağı bir yandan diğer yana çevirmek duyarlılığı örnekler: bardağın konumundaki küçük bir değişiklik belirli bir su molekülünün farklı bir okyanusa ulaşması anlamını taşır. Bardağın konumu konusundaki belirsizlik o su molekülünün hangi okyanusu boylayacağına yönelik kestirimde bulunma yetene-





2. Günümüzde “Galton Kutusu” olarak bilinen yapının 1889’da Galton tarafından yapılan şematik çizimleri.

ğimizi sınırlandırabilir – ama ancak ve ancak bu belirsizlik kıta ayrımı hattını aşarsa böyle olur. Bunu yapmayı gerçekten de deniyor olsaydık, bu tür bir matematiksel hattın gerçekten de kıtaları ayırıp ayırmadığını ve su molekülü-

nün okyanusa erişmesini engelleyebilecek diğer olası yolları göz önünde bulundururduk. Genellikle kaos münferit bir "sendeleme noktası"ndan fazlasını içerir; daha ziyade, sürekli olarak buharlaşıp çok daha fazla kıtasal ayrımların olduğu yerlere düşen bir su molekülünü andırır.

Doğrusalsızlık, olmadığı şey biçiminde tanımlanır (doğrusal değildir). Bu tür bir tanım karışıklığa davetiye çıkarır: fil olmayanların biyolojilerini nasıl tanımlarız? Akılda tutulması gereken temel fikir, doğrusalsız bir dizgenin orantısız bir karşılık göstereceğidir: bardağa ikinci bir damla eklemenin etkisi, ilk damlanın etkisinden daha büyük (ya da daha küçük) olabilir. Doğrusal dizgeler daima orantılı biçimde karşılık verir. Doğrusalsız dizgelerin ise böyle davranması gerekmez; bu da doğrusalsızlığa duyarlı bağımlılığın kökeninde önemli bir rol sağlar.

Burns' Day Fırtınası

Fakat farecik, yalnız değilsin,
Ne zaman ki bir öngörünün
boşuna olabileceğini kanıtlarsın:
Fareler ve insanların en iyi planları
Genelde çarpık çıkar;
Ve bize kalan yalnızca keder ve acı,
Vaat edilen mutluluk karşılığında!

Yine de sen kutsanmışsın, benimle
kıyaslandığında!
Şu an yalnızca dokunuyor sana:

Ama ah! Bense çeviriyorum
gözlerimi geriye
Kederli umutlara bakıyorum!
Ve ileriye, onu göremesem de
Tahminlerde bulunup korkuyorum!

Robert Burns, "To A Mouse" (1785)

Burns'ün şiiri yalnızca şu anda yaşayabilme yeteneğinden, tatmin edilememiş beklentilerin acısını ya da olacak olanın belirsizliğinin verdiği korkuyu bilmemesinden ötürü fareye övgülerde bulunur. Üstelik, Burns, farelerle insanların planlarını bilgiişlem makinelerinden pek az yardım alarak yaptıkları 18. yüzyılda yaşamaktaydı. Öngörü sancılı olsa da, meteoroloji uzmanları her gün bir sonraki günün hava durumunu tahmine çalışır. Bu bazen işe de yarar. 1990'da, tam da Burns'ün doğumgününde, büyük bir fırtına İngiltere adalar topluluğu da dâhil olmak üzere Kuzey Avrupa'yı silip süpürdü ve büyük hasara ve can kaybına neden oldu. Fırtınanın merkezi Burns'ün İskoçya'daki doğum yerinin üstünden geçtiği için fırtınaya Burns' Day adı verildi. 25 Ocak tarihinde öğle vakti fırtınayı gösteren bir hava durumu şeması Şekil 4'te verilmektedir. Kuzey Avrupa'da doksan yedi kişi yaşamını yitirirken ölenlerin neredeyse yarısı Britanya'daydı ve bu da son 40 yıldaki fırtınalar içinde en fazla can kaybının yaşanmış olduğu anlamını taşıyordu. Yaklaşık 3 milyon ağaç devrildi ve toplam sigorta harcamaları 2 milyar sterline ulaştı. Ama Burns' Day fırtınası öngörülmesindeki başarısızlıkla ünlenmiş fırtınalar listesine asla dâhil edilmedi: Meteoroloji Bürosu tarafından çok isabetli bir biçimde tahmin edilmişti.

Buna karşılık, 1987'deki Büyük Fırtına, bir gece öncesinde BBC televizyonunda bir meteoroloji uzmanının Fransa'da dolaşan bir kasırganın İngiltere'yi etkisi altına almak üzere olduğu biçimindeki söylentiler hakkında endişeye gerek olmadığını söylediği yayınla ünlüdür. Her iki fırtınada da rüzgâr saatte 100 milden fazla bir hızla esmekteydi ve Burns' Day fırtınası çok daha fazla can kaybına neden oldu; ancak, bu olaydan 20 yıl sonra, 1987'deki Büyük Fırtına çok daha sık tartışılmaktadır – belki de Burns' Day fırtınasının aslında isabetli bir biçimde tahmin edilmiş olmasından ötürü. Bu tahmin aşamalarının öyküsü modellerimizde yer alan kaosun kelebekli ya da kelebeksiz alternatif dünyalar olmaksızın da yaşamlarımızı etkileyebilme biçimini çok güzel örneklemekte.

24 Ocak 1990 günü, sabahın erken saatlerinde, Atlantik Okyanusu'nun ortalarındaki iki gemi bulundukları noktadan rutin meteoroloji gözlemleri gönderdi – bulundukları konumlar Burns' Day fırtınasına dönüşecek hava olayının tam da merkezini oluşturuyordu. Bu gözlemlere göre, işletilen tahmin modelleri fırtınayı hatasız tahmin etmektedir. Modelin fırtına sonrasındaki uygulaması da, bu gözlemler göz ardı edildiğinde, modelin yanlış yerde zayıf bir fırtına öngördüğünü gösterdi. Burns' Day fırtınası gündüz vakti etkili olduğu için, uyarıda bulunulmaması durumunda bunun can kaybı üzerinde çok büyük bir etkisi olacaktı; bu nedenle, karşımızda, yapılmamış olmaları durumunda hava tahminini ve dolayısıyla da olayların gidişini değiştirebilecek gözlemlere yönelik bir örnek durmaktadır. Kuşkusuz, bir okyanus hava tahmin gemisini gözden kaçırmak nal çivisini düşürmekten daha zordur. Bu öykü-



THE TIMES

30p

FRIDAY JANUARY 26 1990

Ministers promise help after South is battered by 110mph gusts

Winds of devastation kill 38

Motorways blocked, London halted

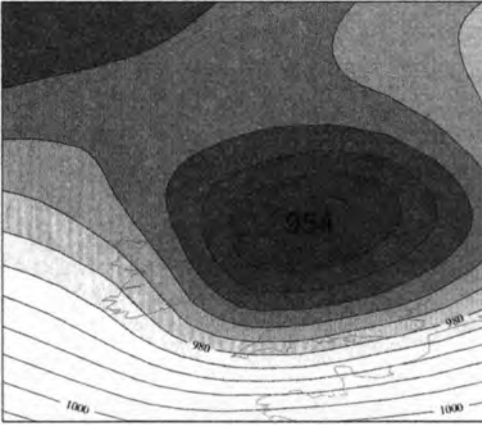


3. Burns' Day fırtınasını izleyen gün *The Times*'ın başlığı.

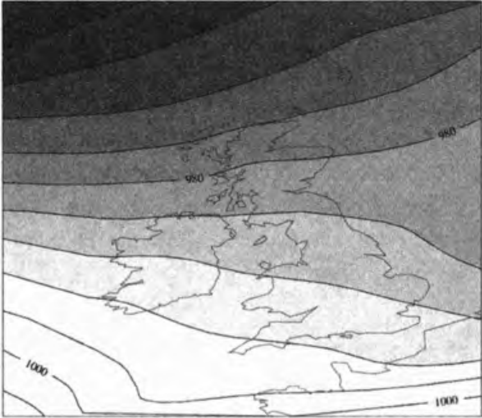
nün dahası da var ve konumuzla ilişkisini anlamak için hava modellerinin nasıl "işlediklerini" görmemiz gerekir.

Operasyonel hava tahmini kendi başına hayranlık uyandırıcı bir olgudur. Her gün, olası en uzak noktalarda gözlemler gerçekleştirilir ve bunlar dünyanın dört bir yanındaki ulusal meteoroloji büroları ile paylaşılır. Çok farklı uluslar bu verileri kendi bilgisayar modellerini işletmek için kullanır. Bazen bir gözlem rüzgâr hızı kutucuğuna ısının yazılması, yazım hatası ya da aktarımdaki bir hata gibi sıradan hatalara maruz kalacaktır. Bu hataların tahmini bulandırmasını engellemek için gelen gözlemler kalite kontrolünden geçirilir: modelin beklentilerine aykırı gözlemler (son tahmin dikkat alınarak) reddedilebilir – özellikle de bu gözlemleri destekleyecek nitelikte hiçbir bağımsız, yakın bir gözlem yoksa. Elbette, Atlantik Okyanusu'nun ortasında "yakın" gözlemler yapılması pek olası değildir; gemi gözlemleri modelin orada olacağını tahmin etmediği bir fırtınanın gelişmekte olduğunu gösteriyordu ve bu nedenle de bilgisayarın otomatik kalite kontrol programı bu gözlemleri reddetmişti.

Neyse ki, bilgisayar da denetleniyordu. Bir müdahale uzmanı görev başındaydı ve bu gözlemlerin büyük değer taşıdığının farkına vardı. Onun görevi de bilgisayarların ara sıra yapabileceği apaçık saçmalıklara anında müdahale etmekti. Bilgisayarın gözlemleri onamasını sağladı. Bu eylemi gerçekleştirip gerçekleştirmemek, bir tür doğru düşünüp karar verme sorunudur. O anda hangi eylemin daha iyi bir hava tahminiyle sonuçlanacağını bilmek olanaksızdı. Bilgisayar "uyumlandı" ve gözlem kullanıldı. Fırtına tahmin edildiği için de yaşamlar kurtarıldı.



FC +48 h



4. Bir hava durumu modelinin gözüyle Burns' Day fırtınasını yansıtan modern bir hava durumu şeması (üstte) ile aynı bölgeyi hedefleyip oldukça güzel bir hava gösteren iki gün öncesine ait bir tahmin (altta).

Buradan çıkarılabilecek iki mesaj var. Birincisi, modellerimiz kaotik olduğunda gözlemlerimizdeki küçük değişikliklerin öngörümüzün kalitesi üzerinde büyük etkileri olabilir. Harcamaları kesmeyi hedefleyen ve herhangi bir hava istasyonundan gelen herhangi bir gözlemin tipik yararını hesaplayan bir muhasebeci, büyük olasılıkla, doğru zamanda doğru yerde bulunan hava istasyonlarından birinden gelecek bir raporun değerini ve aynı zamanda çoğu zaman gerçekten de yapacak hiçbir işi olmayan müdahale uzmanlarının değerini küçümseyecektir. İkincisi, Burns' Day tahmini kelebek etkisinden bir parça farklı bir şeyleri örneklemektedir. Matematiksel modeller olası dünyaları –bunlar bir tane de olabilir– dikkate alarak değil, modelimizin farklı simülasyonlarını –bunlar da dilediğimiz sayıda olabilir– karşılaştırarak gerçek geleceğin neler getirebileceği konusunda endişelenmemize olanak sağlar. Burns'ün de kabul edeceği gibi, bilim bize tahminde bulunmak için yeni yollar ve korkmak için yeni şeyler sunar. Kelebek etkisi farklı dünyaları karşılaştırır: nal çivisinin mevcut olduğu bir dünyayla bu çivinin olmadığı bir dünya. *Burns etkisi* odak noktasını bize ve –kusursuzluktan uzak çeşitli modeller kullanarak gerçekleştirilen farklı simülasyonlara dayanarak– gerçek dünyada ussal kararlar alma çabamıza yöneltir. Gerçeklik ile modellerimiz, gözlemler ile matematik, görgül bir gerçek ile bilimsel kurgu arasında kesin bir ayrım yapamamak, hem halk hem de bilim insanları arasında kaos konusundaki mevcut kafa karışıklığının kökenini oluşturur. Bu ayrımın ne kadar önemli olduğunu açığa çıkaran da bir kez daha doğrusalsızlık ve kaos araştırmaları oldu. X. Bölüm'de, bu olaya dair bir tahminde

bulunurken, bugünün hava tahmincileri olsa kendi kaos anlayışlarından elde ettikleri bilgileri nasıl kullanacaklarını daha derinden inceleyeceğiz.

Kaotik matematiksel dizgelerde bulunan üç özelliğe değindik: kaotik dizgeler doğrusal değildir, deterministtir, ayrıca başlangıçtaki duruma duyarlılık göstermeleri açısından istikrarsızdır. Bunu izleyen bölümlerde bunları sınırlandıracağız, ama bizi asıl ilgilendiren yalnızca kaos matematiği değil, aynı zamanda bize gerçek dünya hakkında neler anlatabileceğidir.

Kaos ve gerçek dünya: tahmin edilebilirlik ve bir 21. yüzyıl şeytanı

> Bilimde, sırf matematiksel hesaplamanın biri tamamlandı diye Doğa'nın belirli bir yönünün kesin olduğuna inanmaktan daha büyük bir hata yoktur.
>
> Alfred North Whitehead (1953)

Kaosun günlük yaşamlarımız için taşıdığı anlamlar nelerdir? Kaos, hava tahmininin yol ve yordamını etkiler; bu yol ve yordamlar hava koşulları yoluyla doğrudan, hem havanın hem de tahminlerin kendilerinin iktisadi sonuçları yoluyla da dolaylı olarak bizi etkiler. Kaos ayrıca iklim değişikliği konusunda ve küresel ısınmanın gücünü ve etkilerini öngörebilme yeteneğimizde rol oynar. Tahmin ettiğimiz daha pek çok şey olsa da, hava ve iklim modelleme, sırasıyla, kısa vadeli tahmin ile uzun vadeli modellemeyi temsil etmekte kullanılabilir. "Bir sonraki güneş tutulması

ne zaman?" sorusu astronomide hava tahmini gibi kısa vadeye yönelikken, "Güneş sistemi istikrarlı mı?" sorusu da iklim gibi uzun vadeye yöneliktir. Finans alanında belirli bir senetten 100 hissenin ne zaman satın alınacağı hava durumu sorusu gibiyken, hisse senedine mi yoksa gayrı menkule mi yatırım yapılacağı iklim sorusunu andırmaktadır.

Bilim dalları üzerinde de büyük bir etkisi olan kaos, bilim insanlarının "hata" ile "belirsizlik" sözcükleriyle ne demek istediklerinin ve dünyamıza ya da modellerimize uygulandığında bu anlamların nasıl değiştiğinin yakından incelenmesine yol açtı. Whitehead'in de belirttiği gibi, matematiksel modellerimizi sanki gerçek dünyayı bir biçimde yönetiyorlarmış gibi yorumlamak tehlikelidir. Hiç kuşkusuz, kaosun en ilginç etkileri gerçekten de yeni değil, ama son 50 yıldaki matematiksel gelişmeler birçok eski soruya yeni bir ışık tutmakta. Örneğin, belirsizliğin, Laplace'ın şeytanının gözlemsel gürültüden kaçamayacak bir 21. yüzyıl temsilcisi üzerindeki etkisi ne olabilir?

Doğanın yasalarını kesin bir biçimde bilen ve keyfî biçimde uzun bir zaman diliminde soyutlanmış bir kaotik dizgeye yönelik iyi ama kusursuz sayılmayacak gözlemleri bulunan bir zihin düşünün. Böyle bir fail –bütün bu verileri bilgiişlemsel açıdan kesin bir analize tabi tutabilecek kadar büyük olsa da– dizgenin mevcut durumunu belirleyemezdi ve bu nedenle de şu an –onun yanı sıra gelecek– onun açısından belirsiz kalırdı. Failimiz geleceği kesin olarak tahmin edemezken gelecek de onun için gerçek sürprizler sunamazdı, zira neyin olabileceğini ya da olamayacağını görebilir ve gelecekteki herhangi bir olayın olasılığını bilirdi: dünyanın tahmin edilebilirliğini görebilirdi. *Eğer* onun

modeli kusursuzsa, şu anın belirsizliği geleceğin iyi ölçümlenmiş belirsizliği haline gelecektir.

1927 tarihli Gifford konferanslarında, Sir Arthur Eddington, kaos sorununun özüne inmekteydi: bazı şeyleri tahmin etmek basit iştir –özellikle bunlar matematiğin kendisiyle bağlantılıysa– ama bazı şeyler yalnızca tahmin edilebilir görünür, bazen:

> Cornwall'dan izlenebilecek bir tam güneş tutulmasının 11 Ağustos 1999'da gerçekleşeceği kehanetinde bulunuluyor. (…) Ben 2+2'nin 1999'da bile 4 edeceğini tahmin etme cesaretinde bulunabilirim. (…) Gelecek yıl bu sıralar havanın nasıl olacağını tahmin etmek (…) büyük olasılıkla asla uygulanabilirlik kazanmayacaktır. (…) Mevcut koşullara ilişkin geniş ölçüde ayrıntılı bilgi edinmemiz gerekir zira küçük bir sapma dalga dalga büyüyen bir etki yaratabilir. Güneşin durumunu izlemeliyiz (…) volkan püskürmelerinden önceden haberdar olmalıyız (…) kömür madenlerindeki bir grevden (…) dikkatsizce atılmış yanan bir kibritten…

Güneş sistemine yönelik en iyi modellerimiz kaotiktir ve hava durumuna yönelik en iyi modellerimiz kaotik görüntü çizer: peki ama Eddington 1928 tarihinde 1999'da güneş tutulması olacağından neden emindi? Ve bir sene önceden yapılacak hava tahmininin asla doğru olamayacağından neden bir o kadar emindi? X. Bölüm'de kaosla daha iyi başa çıkmak için tasarlanmış modern hava tahmin tekniklerinin o güneş tutulmasını öngörmeye nasıl yardım ettiklerini göreceğiz.

Paradigmalar çarpıştığında: kaos ve uyuşmazlık

Son 20 yılda kaos konusunda çalışmayı ilginç kılan şeylerden biri, dünyaya dair farklı bakış açılarının aynı gözlem düzeyinde çatışmalarından kaynaklanan sürtünmedir. Kaos bir ölçüde uyuşmazlığa neden oldu. Kaosun doğmasına yol açan çalışmalar hem profesyonel hava tahmincilerinin hava tahminlerinde bulunma yordamında hem de tahminin nelerden oluştuğu konusunda devrim yarattı. Bu yeni fikirler genellikle geleneksel istatistiksel modelleme yöntemleriyle uzlaşmamakta ve yine de gerçek dünyanın en iyi nasıl modelleneceği konusunda yeni ufuklar açmaktadır. Alanın doğasından ve –ister İskandinavya'daki tarla farelerin sayısı, ister kaosu ölçmek için matematiksel bir hesaplama, ister Güneş yüzeyindeki lekelerin sayısı, ister petrolün gelecek ayki fiyatı, ister yarınki en yüksek sıcaklık, ister en son gerçekleşen güneş tutulmasının tarihi olsun– sorunun yöneltildiği belirli bir dizgeyi kavrayış düzeyimizden ötürü bu muharebe küçük çatışmalara bölünmektedir.

Küçük çatışmalar ilginçtir, ama her iki taraf da geleneksel üstünlük –örneğin, "en iyi" model– için çarpıştığında bile kaos daha derin kavrayışlar sunacaktır. Bu noktada, kaos araştırmaları üstünlükten ne kastedildiğini yeniden tanımlamış bulunuyor: bugün en iyi modeli, hatta "iyi" bir modeli oluşturan şey için yeni tanımlar düşünmeye zorlanmaktayız. Kuşkusuz, Gerçek denen şeye yaklaşma fikrinden vazgeçmeli ya da en azından onunla bizim aramızdaki mesafeyi hesaplamanın tamamen yeni bir yolunu tanımlamalıyız. Kaos incelemeleri bizi kusursuzluk

sağlama umudu olmaksızın da yararlı olacak bir şeyler oluşturmaya ve tahminde bulunmaya yönelik aşikâr birçok acı gerçekten vazgeçmeye teşvik etmektedir – tıpkı iyi bir tahminin hedefe yakın bir kestirimden oluştuğu biçimindeki safça fikirden vazgeçmemiz gerektiği gibi. Kaosun taşıdığı anlamları anlamamızdan önce bu bize hiç de safça görünmüyordu.

La Tour'un gerçek dünyadaki bilime ilişkin gerçekçi vizyonu

Bu bölümü kapatırken, iyi bir modeli neyin oluşturduğunu yeniden gözden geçirmeye ve tahmin yanılgılarımızdan sonuçta neyin sorumlu olduğuna ilişkin inançlarımızı yenilemeye kaosun bizi nasıl zorlayabileceğini örnekleyelim. Kaosun bu etkisi hem bilim insanları hem de matematikçiler tarafından hissedilse de, gözden geçirme olgusu bireyin bakış açısına ve incelenmekte olan görgül dizgeye göre değişiklik gösterecektir. Bu durum Şekil 5'te verilen, Georges de la Tour'un 17. yüzyılda yaptığı ve bir iskambil oyununun resmedildiği Fransız barok dönem tablosunda çok iyi örneklenmektedir. La Tour, hiç kuşkusuz, mizah duygusuna sahip bir barok ressamdı. Falcılıktan ve şans oyunlarından, özellikle de şansın katılımcıların inandığından daha az rol oynadığı oyunlardan hoşlanıyordu. Kuramsal açıdan kaos işte tam bu rolü oynayabilir. Bir beceri, el çabukluğu, kavrama ve hesaplama yeteneği gerektiren bir eylemde bir araya gelen bir matematikçiyi, bir fizikçiyi, bir istatistikçiyi ve bir felsefeciyi göstermek için bu tablo-



5. Georges de la Tour'un 1645'te yaptığı *Le Tricheur à l'as de carreau* adlı tablo.

yu yorumlayacağız; betimlediğimiz şey, muhtemelen, bilim yapmanın ta kendisi, ama karşımızda duran şey bir poker oyunu. Tabloda tam olarak kimin kim olduğu sorusu açık kalacak, çünkü kitap boyunca doğa biliminin bu canlı örneklerine geri döneceğiz. Kaosun ortaya çıkardığı bilgilere bakan kişinin perspektifine göre farklılık gösterse de, bu gözlemlerin bazıları yerli yerindedir.

Sağda yer alan kusursuz giyimli delikanlı titiz hesaplara dalmış, belli ki, bir tür olabilirlik hesabı yapmakta; şu anda masadaki altın paranın büyük bir kısmına o sahip. Kâğıt dağıtan kişi önemli bir rol oynamakta çünkü o olmazsa oynanacak oyun da olmaz; o, sayesinde iletişim kurduğumuz

dilin kendisini sağlamakta ama kendisi hizmetçiyle sözlü olmayan bir iletişime girmiş görünüyor. Hizmetçinin rolü pek o kadar net değil; kendisi belki yüzeysel nitelikte ama yine de dağıtılan şarap oyunu etkileyecektir ve ayrıca hizmetçinin varlığı dikkatleri dağıtabilir. Kurdeleleri çözülmüş eski püskü giysili düzenbaz belli ki gerçek dünyanın herhangi bir modelindeki görüntülerle değil, gerçek dünyanın kendisiyle ilgilenmekte: sol eliyle kemerinin içindeki birkaç karo asından birini çıkarmakta ve bu kartı oyuna katmak üzere. O halde, aslında matematiksel modelinin betimlediği oyunu oynamıyorsa, delikanlının hesapladığı "olabilirlikler" ne anlam taşıyor? Ve düzenbazımızın bildikleri ne kadar derin? Bakışları doğrudan bize yönelik ve bu da onun eylemlerini görebildiğimizi bildiği, hatta kendisinin bir tabloda yer aldığının da farkında olduğu anlamına mı geliyor?

Kaos öyküsü önemli, çünkü bu oyuncuların her birinin perspektifinden dünyayı görmemizi sağlıyor. Yalnızca oyunun oynanmasını sağlayacak matematiksel bir dil mi geliştiriyoruz? Potansiyel açıdan yararlı modeli aşırı yorumlarken onun da –diğer modeller gibi– kusursuz olmadığı gerçeğini gözden kaçırarak ekonomik yıkım riskini mi yaratıyoruz? Yalnızca tablonun geneline bakıp oyuna doğrudan katılmıyor, sadece ara sıra ilginç bir dikkat dağıtma unsuru mu oluyoruz? Yoksa, değiştirebileceğimiz şeyleri el çabukluğuyla idare ederken dizgenin içinde yer aldığımız için, modelin yetersizliğini ve hatta belki de kendi sınırlarımızı kabul mü ediyoruz? Bu sorulara yanıt verebilmek için, kaosun karmaşık gerçek dünya dizgelerini anlama ve tahmin etme konularında rol üstlenmek üzere geleneksel

doğrusal istatistik gürültüsünden nasıl ortaya çıktığını görmek istiyorsak, bilimin pek çok özel teriminden bazılarını incelememiz gerekiyor. Kaosun doğrusal olmayan dinamiğinin bilim içinde geniş ölçüde kabul görmesinden önce, bu sorular öncelikle felsefecilerin alanına girmekteydi; günümüzde matematiksel modellerimiz yoluyla fiziksel anlamda bilimle uğraşanlara ve tahmin uzmanlarına erişmekte, karar destek istatistiklerini değiştirmekte, hatta siyasetçiler ile siyasa yapıcıları etkilemektedir.

II. Bölüm

ÜSTEL BÜYÜME, DOĞRUSALSIZLIK, SAĞDUYU

Kaotik dizgelere ilişkin en yaygın mitlerden biri, bu dizgeleri tahmin etmenin olanaksız olduğudur. Bu mitin yanlışlığını ortaya koymak için gitgide daha ileri bir gelecek için kestirimde bulundukça tahmindeki belirsizliğin nasıl büyüdüğünü anlamamız gerekir. Bu bölümde *üstel büyüme* (exponential growth) kavramının köken ve anlamını araştırmaktayız zira, ortalama olarak, kaotik sistemdeki küçük bir belirsizlik üstel düzeyde hızlı büyüyecektir. Bir anlamda, bu olgu gerçekten de daha ileri bir gelecek hakkında tahminde bulunduğumuzda hata ile belirsizliğin nasıl arttığına ilişkin geleneksel fikirlerimizde yer edenden "daha hızlı" bir belirsizlik artışı anlamına gelmektedir. Yine de, kaosu tahmin etmek bazen kolay olabilir.

Satranç, pirinç, Leonardo'nun tavşanları: üstel büyüme

Satrancın kökeni hakkında sık sık gündeme getirilen bir öykü üstel büyümenin hızını çok iyi örnekler. Öyküye

göre, eski Pers ülkesinin bir kralı oyun kendisine ilk tanıtıldığında o kadar memnun kaldı ki oyunu yaratan Sissa Ben Dahir'i ödüllendirmek istedi. Satranç tahtasının 8'e 8 düzeninde 64 karesi vardır; ödül olarak Ben Dahir yeni satranç tahtasının kullanılmasıyla belirlenecek oldukça mütevazı görünen bir meblağ talep etti: tahtanın ilk karesine bir, ikincisine iki, üçüncüsüne dört, dördüncüsüne sekiz, beşincisine on altı, vs. pirinç tanesi yerleştirilecek; sayı 64. kareye gelene kadar her bir karede iki kat artırılacaktı. Matematikçiler bir sayıdan başka bir sayıyı türeten her türlü kurala matematiksel *denklem* adını verir; biz de bu basit kurala ("yeni değeri üretmek için mevcut değeri ikiyle çarp" kuralına) *Pirinç Denklemi* diyeceğiz.

Ben Dahir'in ne kadar pirinç istediğini hesaplamadan önce, ilk kare için tek bir pirincin, ikinci kare için iki pirincin, üçüncü kare için üç pirincin, vs. yer aldığı ve son kare için de 64 pirincin gerektiği doğrusal büyümeyi inceleyelim. Bu durumda, karşımızda 64 + 63 + 62 + (...) + 3 + 2 + 1 ya da, yaklaşık olarak, 1000 pirinç tanesi olacaktır. Sırf karşılaştırma yapmak için söylersek, bir kilogramlık pirinç paketinde on binlerce pirinç tanesi olacaktır.

Pirinç Denklemi ise birinci kare için bir pirinç, ardından ikinci için iki, üçüncü için dört, sonra da ilk sıranın son karesine gelene kadar 8, 16, 32, 64 ve 128 pirinç gerektirir. İkinci sıranın üçüncü karesinde 1000 sayısını aşarız ve ikinci sıranın sonuna erişmeden önce pirinç paketimizi tümden boşaltacak bir kare gelir. Sırf bundan sonraki kareyi doldurmak için yeni bir torba pirinç gerekirken bundan sonrakine iki, vs. gerekecektir. Üçüncü sıradaki bir kare için küçük bir evin hacmine yakın ha-

cimde pirinç gerekir; beşinci sıranın sonuna ulaşmadan önce de Royal Albert Hall'u doldurmaya yetecek kadar pirince ihtiyaç olur. Son olarak, bir tek 64. kare milyarlarca pirinç tanesi –ya da, kesin söylemek gerekirse, 2^{63} tane (=9.223.372.036.854.775.808) tane– gerektirecek, toplam pirinç sayısı da 188.446.744.073.709.551.615 olacaktır. Bu hiç de hafife alınacak bir miktar sayılmaz! Tüm dünyanın iki bin yıl içindeki toplam pirinç üretimi gibi bir şey. Üstel büyüme çabucak her türlü orantının dışına çıkar.

Doğrusal büyüme durumunda herhangi bir karedeki pirinç miktarını üstel büyüme durumunda aynı karedeki pirinç miktarıyla karşılaştırarak, üstel büyümenin doğrusal büyümeden çok daha hızlı olduğunu çabucak görebiliriz: dördüncü karede doğrusal durumda olduğundan dört kat fazla pirinç tanesi toplanır (üstel durumda 8, doğrusal durumda yalnızca 4) ve birinci sıranın sonundaki sekizinci kareye gelindiğinde de üstel durumda 16 kat daha fazla pirinç tanesi vardır! Bundan kısa süre sonra da astronomik sayılara ulaşılır.

Elbette, yukarıdaki örnekte bazı *parametrelere* has değerleri sakladık: her bir kare için ek bir pirinç tanesi değil de, örneğin, 1000 pirinç tanesi ekleyerek doğrusal büyümeyi hızlandırabilirdik. Bu parametre –yani ek pirinçlerin sayısı– karenin sayısı ile o karenin üzerindeki pirinçlerin sayısı arasındaki orantılılık sabitini tanımlar ve bize bu ikisi arasındaki doğrusal ilişkinin eğimini verir. Üstel durumda da bir parametre söz konusu: her bir adımda tanelerin sayısını iki çarpan değerinde artırdık, ama bu da üç çarpan ya da bir buçuk çarpan olabilirdi.

Üstel büyümeyle ilgili şaşırtıcı şeylerden biri şudur: bu parametrelerin değerleri *her ne* olursa olsun, bir zaman sonra üstel büyüme *her türden* doğrusal büyümeyi aşar ve o noktadan kısa süre sonra da –doğrusal büyüme ne kadar hızlı olursa olsun– onu çok gerilerde bırakır. Sonuçta bizi ilgilendiren bir satranç tahtasındaki pirinçler değil, zaman içinde belirsizliğin dinamiğidir. Yani, yalnızca bir nüfusun artışı değil, bu nüfusun gelecekteki artışına yönelik tahminimizdeki belirsizlik. Tahminde bulunma bağlamında öyle bir zaman gelir ki, bugün çok küçük olan ama üstel düzeyde artan belirsizlik bugün çok daha büyük olan ama doğrusal düzeyde artan belirsizliği aşar. Üstel büyümeyi zamanın karesine, küpüne ya da herhangi bir kuvvetle artırılan zamana orantısal bir büyümeyle karşılaştırdığımızda da aynısı gerçekleşir (simgelerle anlatırsak: istikrarlı üstel büyüme sonunda t^2 ya da t^3 ya da herhangi bir sayı anlamında n kullanırsak t^n ile orantılı her türlü büyümeyi aşacaktır). Bu nedenle de üstel büyüme matematiksel açıdan apayrı bir konuma sahiptir ve kaosu tanımlamak için bir ölçüt kabul edilir. Ayrıca, kaotik dizgelerin ne yazık ki tahmin edilemez oldukları biçimindeki yaygın ama temelde hatalı izlenime de katkı sağlar. Ben Dahir'in satranç tahtası, üstel büyümenin doğrusal büyümeden daha hızlı olmasında derin bir anlam olduğunu gösterir. Bunu hava tahmini bağlamına yerleştirdiğimizde, zaman içinde birkaç yüzyıl ileriye ve birkaç yüz kilometre kuzeybatıya, İran'dan İtalya'ya gitmekteyiz.

13. yüzyılın başında, Pisalı Leonardo nüfus dinamiği hakkında bir soru ortaya attı: geniş, yeşillik, etrafı duvarlarla çevrili bir bahçeye yeni doğmuş bir çift tavşan bıra-

kacak olursak, eğer doğa her bir olgun çiftin üremesine ve her ay yeni bir çift tavşanın doğmasına olanak tanırsa ve yeni doğan tavşanlar da ikinci aya gelindiğinde erişkin hale gelirse, bir yıl sonunda kaç tavşanımız olur? Birinci ay elimizde bir çift genç tavşan var. İkinci ay bu çift ergenliğe ulaşıp çiftleşir ve üçüncü ayda yeni bir çift dünyaya getirir. Böylece, üçüncü ayda bir erişkin çift ile yeni doğmuş bir çift olur. Dördüncü ayda ilk tavşan çiftinden doğan bir çift tavşan olacağı için toplam üç çiftin ikisi erişkindir. Beşinci ayda iki yeni çift doğar (yetişkin çiftlerin her birinden) ve artık beş çiftin üçü yetişkindir. Ve bu böyle devam eder.

Peki, bu "nüfus dinamiği" neye benzer? Birinci ayda elimizde yavru bir çift, ikinci ayda olgun bir çift, üçüncü ayda bir yetişkin çift ve bir yavru çift, dördüncü ayda iki yetişkin çift ve bir yavru çift, beşinci ayda üç yetişkin çift ve iki yavru çift vardır.

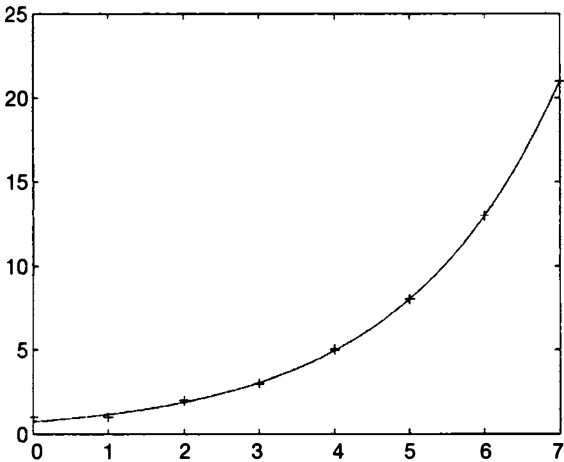
Eğer her bir ay çiftleri sayarsak, sayıların 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 (...) biçiminde olduğunu görürüz. Leonardo bu sıralamada bir sonraki sayının daima kendisinden önceki iki sayının toplamı olduğunun farkına vardı ($1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 2 = 5$, ...); bu durum mantıklı zira bir önceki sayı geçen ayki sayı (modelimizde sayıları ne olursa olsun bütün tavşanlar hayatta kalmaktadır) ve ondan bir önceki sayı da erişkin çiftlerin sayısıdır (dolayısıyla bu ay doğan yeni çiftlerin sayısı).

"Ve de altıncı ayda elimizde 12 çift tavşan vardır" demek artık sıkıcı olacağı için, bilim insanları tavşan çiftlerinin sayısına karşılık X kısaltmasını kullanır ve altıncı aydaki çift sayısı için de X_6 terimini kullanırlar. Ayrıca 1, 1, 2, 3, 5, 8, (...) sıralaması da tavşan nüfusunun zaman

içinde nasıl geliştiğini yansıttığı için, bu seriye ve ona benzeyen diğerlerine *zaman serisi* denmektedir. Tavşan Denklemi şu kurala göre tanımlanır:

> X'in önceki değerini X'in mevcut değerine ekleyin ve toplamı X'in yeni değeri olarak alın.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, (...) serisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir (Fibonacci, Pisalı Leonardo'nun lakaplarından biriydi) ve bu sayılar doğada tekrar tekrar karşımıza çıkar: ayçiçeklerinin, kozalakların, ananasların



6. Beher ayki tavşan çifti sayısını gösteren çarpı serisi (Fibonacci sayıları); yakınında yer aldıkları kesintisiz eğri, ilgili üstel büyüme.

yapısında mevcuttur. Burada bu sayılarla ilgilenmemizin nedeni, zaman için yaklaşık olarak üstel büyümeyi örneklemeleridir. Şekil 6'daki çarpılar Fibonacci'nin noktalarını –zamanın bir fonksiyonu olarak tavşan nüfusu– ve kesintisiz çizgi de λt kuvvetinde artan ikiyi –ya da simgesel açıdan $2^{\lambda t}$; burada t ay cinsinden zamanı, λ de ilk katsayıyı göstermekte– temsil ediyor. Üstsimge ile yazılıp zamanı çarpan katsayılar sabit üstel büyümeyi anlatmanın yararlı bir yoludur. Bu örnekte, λ altın oran denen bir sayının logaritmasına denktir – bu çok özel sayı bu diziden çıkan *Matematik** başlıklı kitapta ele alınmaktadır.

Şekil 6'da dikkat edilecek ilk unsur, noktaların eğriye yakın yer almaları. Üstel eğri matematikte özel bir yere sahip, çünkü artışı kendi mevcut değerine orantılı bir fonksiyonu yansıtmaktadır. Ne kadar artarsa o kadar hızlı büyür. Bu gibi bir fonksiyonun Leonardo'nun tavşan nüfusunun dinamiğini açıklaması mantıklı zira takip eden ayki tavşanların sayısı bu ayki tavşanların sayısıyla aşağı yukarı orantılı. Şekil konusunda dikkat edilmesi gereken ikinci şey, noktaların eğrinin üstünde *olmaması*. Bu eğri Fibonacci'nin Tavşan Denklemi için iyi bir *model* ama kusursuz değil: her bir ayın sonunda tavşanların sayısı daima bir tamsayı ve eğri doğru tamsayıya yaklaşabilse de tam olarak ona denk değil. Aylar geçtikçe ve nüfus arttıkça, eğri her bir Fibonacci sayısına gitgide yaklaşıyor ama asla onlara ulaşamıyor. Gitgide yaklaşıp da asla tam olarak ulaşamama kavramı bu kitapta tekrar tekrar karşımıza çıkacak.

* *Matematik*, Timothy Gowers; Türkçesi: Abdullah Ersoy, Dost Kitabevi Yayınları, Ankara, 2013.

Peki, Leonardo'nın tavşanları tahmin belirsizliğinin artışını anlamamıza nasıl yardımcı olabilir? Bütün gözlemler gibi, bir bahçedeki tavşanları saymak da hataya açıktır; I. Bölüm'de gördüğümüz gibi, gözlemsel belirsizliklere gürültünün neden olduğu söylenir. Diyelim ki, ilk ayda bahçede bulunan bir çift yetişkin tavşan Leonardo'nun gözünden kaçtı, bu durumda bahçedeki çiftlerin sayısı aslında 2, 3, 5, 8, 13, (...) olur. İlk tahmindeki (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) hata, Gerçek ile bu tahmin arasındaki fark (yani: 1, 2, 3, 5, ...) olacaktır (yine, Fibonacci serisi). 12. ayda bu hata hiç de gözden kaçmayacak olan 146 çift tavşan gibi bir sayıya ulaşır! Tavşanların ilk sayısındaki küçük bir hata tahminde çok büyük bir hatayla sonuçlanır. Aslında, hata zaman içinde üstel biçimde büyümektedir. Bunun birçok anlamı var.

Üstel hata artışının tahminlerimizin belirsizliği üzerindeki etkisini düşünelim. Bir kez daha doğrusal büyüme ile üstel büyümeyi ele alalım. Diyelim ki, sırf işimize yarasın diye, tahminimizi üretmekte kullandığımız ilk gözlemdeki belirsizliği azaltabiliyoruz. Eğer hatanın büyümesi doğrusalsa ve ilk belirsizliği on çarpan gücünde azaltıyorsak, o zaman, belirsizliğimiz aynı eşiği aşana kadar dizgeyi on kat daha uzun tahmin edebiliriz. Eğer ilk belirsizliği 1000 çarpan gücünde azaltırsak, o zaman, aynı miktara ilişkin 1000 kez daha uzun tahminler yapabiliriz. Bu, doğrusal modellerin bir avantajıdır. Ya da, daha kesin konuşmak gerekirse, bu, yalnızca doğrusal dizgeleri incelemenin belirgin bir avantajıdır. Buna karşılık, eğer model doğrusal nitelikli değilse ve belirsizlik üstel olarak büyüyorsa, o zaman, ilk belirsizliğimizi on çarpan gücünde azaltsak bile aynı doğ-

ru sonuçla ancak ve ancak iki kat daha uzun tahminde bulunabiliriz. Bu durumda, belirsizlikteki üstel büyümenin zaman içinde sabit olduğunu *varsayarsak*, belirsizliği 100 çarpan kuvvetinde azaltmak bizim doğru sonuçla neticelenecek tahmin erimimizi yalnızca sekiz çarpan gücünde artıracaktır. Unutmamak gerekir ki, bir ölçümde belirsizliği azaltmak ender olarak serbesttir (tavşanları ikinci kez sayması için birisini işe almamız gerekir) ve belirsizlikteki büyük indirimler de pahalıya mal olabilir; bu nedenle de belirsizlik üstel düzeyde hızlı büyüdüğünde masraf da hızla artar. Başlangıçtaki koşullardaki belirsizliği azaltarak tahmin hedeflerimize ulaşma çabası inanılmaz düzeyde pahalı olabilir.

Neyse ki, herhangi bir gözlemin gürültü tarafından bulandırılmadığından asla emin olamayacağımız gerçeğini kabullenmemize olanak sağlayacak bir alternatif var. Tavşanlar ya da pirinç taneleri söz konusu olduğunda gerçek bir durum, doğru yanıtı yansıtan bir tamsayı var gibi görünmektedir. Eğer başlangıçtaki koşulda belirsizliği sıfıra indirgersek, o zaman, hata olmadan kestirimde bulunabiliriz. Ama, gerçekten de, başlangıçtaki koşuldan bir biçimde emin olabilir miyiz? Gürültü içinde gizlenen bir tavşancık daha olabilir mi? En iyi tahminimiz bahçede tek bir çift bulunduğu yönündeyken, bahçede iki ya da üç veya daha fazla çift (ya da belki de sıfır sayıda çift) olabilir. Başlangıçtaki koşuldan emin olmadığımızda bir tahmin öbeği oluşturarak modelimize göre gerçekleşen tahminlerin çeşitliliğini inceleyebiliriz: yani, inandırıcı bulduğumuz her bir başlangıç koşulundan başlayan bir tahmin. Böylece, topluluğun bir üyesi X eşittir birden başlarken topluluğun

bir diğer üyesi X eşittir ikiden başlar ve bu böyle devam eder. Sınırlı kaynaklarımızı daha fazla sayıda küme üyesini hesaplamak ve bahçedeki tavşanların mevcut sayısı hakkında daha iyi gözlemler gerçekleştirmek için nasıl paylaştırmamız gerekir?

Tavşan Denkleminde topluluğun farklı üyelerine dair tahminler arasındaki farklılıklar üstel biçimde hızla büyüyecektir; ama bir küme tahmininde bunların ne kadar farklı olduklarını görebilir ve bunu herhangi bir zamandaki tavşan sayısındaki belirsizliğin bir ölçümü olarak kullanabiliriz. Ayrıca, birkaç ay sonra tavşanların sayısını dikkatle sayarsak tek tek küme üyelerinden bazılarını eleme şansımız da olur. Bu küme üyelerinden her biri ilk başta bahçede bulunan tavşanların sayısına ilişkin bir tahmine göre sayılmıştı; bu nedenle de bir küme üyesini elemek bize tavşanların ilk sayısı hakkında daha fazla bilgi sağlar. Elbette, bu bilginin eğer modelimiz kelimenin tam anlamıyla kusursuzsa doğru çıkması gerekir; yani, bu bağlamda, Tavşan Denklemimizin tavşanlarımızın üreme davranışlarını ve yaşam sürelerini eksiksiz saptamasına bağlıdır. Ama modelimiz kusursuzsa, o zaman, geleceğe yönelik gözlemleri geçmişi öğrenmek için kullanabiliriz: bu sürece *gürültü azaltımı* (noise reduction) adı verilir. Modelimizin kusursuz olmadığı ortaya çıkarsa, o zaman, tutarsız sonuçlarla karşılaşabiliriz.

Peki, ya tamsayı olmayan bir şeyi ölçüyor olsaydık, hava sıcaklığı gibi ya da bir gezegenin konumu gibi? Ayrıca, kusursuz olmayan bir hava tahmin modelindeki sıcaklık derecesi gerçek dünyadaki sıcaklık derecesi ile aynı şey midir? Felsefecimizi kaosla ilgilenmeye yönlendiren işte bu

sorulardı. Önce, 1202'den bu yana geçen 9.000 ayda tavşanların neden bütün dünyayı kaplamadıkları biçimindeki daha acil soruyu inceleyelim.

Belirsizliğin gerilmesi, katlanması ve büyümesi

Kaos çalışmaları, hiçbir tahmin tahmin belirsizliğinin ortalama bir hesabı olmaksızın tamamlanmış değildir biçimindeki meteoroloji kuralını doğrular: eğer başlangıçtaki koşulumuzun belirsiz olduğunu bilirsek, o zaman, hem kestirimin kendisiyle hem de olası tahmin hatasının ne olacağını öğrenmekle eşit düzeyde ilgileniriz. Herhangi bir gerçek dizge için söz konusu olan tahmin hatasının sınırsızca büyümemesi gerekir; tek bir pirinç tanesi ya da tek bir tavşan gibi küçük bir hatayla başlasak bile, tahmin hatası keyfî bir biçimde, devasa boyutta büyümeyecek (çok toy bir tahmincimiz varsa, o başka), bunun yerine bir tür sınırlandırıcı değerin yakınlarında doygunluğa ulaşacaktır – nüfusun kendisi gibi. Matematikçimizin elinde (toyluk bir tarafa bırakılırsa) komik düzeyde büyük tahmin hatalarından kaçınmak için bir yol bulunmaktadır ve bu da ilk belirsizliği *son derece* küçük tutmaktır – düşünebileceğiniz bütün sayılardan daha küçük, ama sıfırdan da büyük. Böyle bir belirsizlik sürekli olarak son derece küçük kalacaktır, üstel biçimde hızlı büyüse bile.

Bahçedeki tavşan yemi miktarı ya da bir e-posta dizgesindeki mevcut disk alanı gibi fiziksel unsurlar uygulamada büyümeyi sınırlandırır. Buna neyin neden olduğunu tam olarak bilmesek de sınırlar doğaldır: sanırım anahtarları-

Üstel büyüme: Bayan Nagel'ın üçüncü sınıfından bir örnek

Birkaç ay önce eski bir ilkokul arkadaşımın yazdığı bir e-posta aldım. E-postanın içinde, Kuzey Carolina'da coğrafya okutan bir üçüncü sınıf öğretmeninin yazdığı bir başka e-posta yer alıyordu. E-postayı okuyan herkesin nerede yaşadıklarını belirterek okula bir yanıt gönderme-si isteniyordu; böylece, öğrenciler o yeri yerküre üzerinde belirleyeceklerdi. Ayrıca, her bir okuyucunun e-postayı on arkadaşına iletmesi isteniyordu.

Mesajı kimseye iletmediysem de Bayan Nagel'ın sınıfına İngiltere'de, Oxford'da yaşadığımı belirten bir yanıt gönderdim. Ayrıca, deneylerinden matematik öğretmenlerine bahsetmelerini ve bunu üstel büyümeye bir örnek olarak kullanmalarını önerdim: eğer mesajı on kişiye gönderirlerse ve ertesi gün bu kişilerin her biri mesajı onar kişiye daha gönderirse, üçüncü günde 100, dördüncü günde 1000, birinci haftada da dünyadaki e-posta adresinden daha fazla sayıda e-posta eder. Gerçek bir dizgede üstel büyüme sonsuza kadar devam edemez: sonunda pirincimiz biter, bahçede yer kalmaz ya da yeni e-posta adresi kalmaz. Büyümeyi engelleyen genellikle kaynaklardır: yemyeşil bir bahçe bile sınırlı miktarda tavşan gıdası sağlayabilir. Nüfus modellerimizin büyümesini olduğu kadar nüfusları da sınırlandıran büyüme sınırları vardır.

Bayan Nagel'ın sınıfının üstel büyüme dersini yapıp yapmadıklarını asla öğrenemedim. Elime geçen tek şey, okulun e-posta kotasının aşıldığı ve kapatıldığı yönünde otomatik bir yanıt oldu.

mı park yerinde kaybettim; elbette, oradan kilometrelerce uzakta da olabilirler ama aydan daha uzak bir yerlerde olmaları da ihtimal dışı. Bunu anlamak için kütle çekimi yasalarını anlamam ya da bu yasalara inanmam gerekmez. Benzer biçimde, hava tahmincileri çok ender olarak çok büyük düzeylerde yanılır – bir yıl önceden yapılan tahminlerde bile! Uygunsuz modeller bile genellikle tahmin hataları belirli sınırlar içinde kalacak biçimde sınırlandırılabilir.

Modelimiz balta girmemiş ormanlara –daha önce hiçbir verinin erişmediği değerlere– el attığında bir şeylerin devreye girmesi gerekir – eğer ki modelimiz önceden bozulmadıysa. Çoğu zaman, belirsizliğimiz gereğinden fazla büyüdüğünde kendi üzerine katlanmaya başlar. Hamur yoğurmayı ya da sürekli olarak şekerleme gerip katlayan bir şekerleme makinesini düşünün. Birbirine çok yakın iki şeker tanesini birleştiren hayalî bir şekerleme hattı bu iki makinenin hareketiyle ayrıldıkça gitgide uzayacaktır; ama makinenin kendisinden daha büyük hale gelemeden bu hat kendi üzerine katlanacak ve berbat bir keşmekeş yaratacaktır. Şeker tanelerini birleştiren şekerleme şeridi gitgide uzamayı sürdürse de şeker taneleri arasındaki mesafe artık artmayacak, gitgide daha karmaşık bir düğüm haline gelecektir. Şekerleme makinesi –modelimiz kusursuz olduğunda– kestirim hatasının büyümesinin sınırlarını gözümüzde canlandırmamıza olanak sağlar. Bu örnekte, hata, Gerçek durum ile bizim bu duruma ilişkin en iyi tahminimiz arasındaki *mesafedir*: hatanın üstel büyümesi şekerleme şeridinin yalnızca ilk baştaki hızlı büyümesine karşılık gelebilir. Ama tahminlerimiz sonsuzluğa doğru

uzayıp gitmeyecekse (şekerleme makinenin içinde kalmalıdır, ancak sınırlı sayıda tavşan bahçeye sığabilir, vb.), o zaman, sonunda Gerçek ile bizim tahminimizi birleştiren hat da kendi üstüne katlanacaktır. İçinde büyüyeceği bir yer bulunmayacaktır. Birçok açıdan, şekerleme makinesindeki bir şeker tanesinin devinimini bir kaotik dizgenin üç boyut içindeki gelişimiyle özdeşleştirmek kaotik hareketi gözümüzde canlandırmanın yararlı bir yoludur.

Kaos için bir tür sınır koyduğumuzu hissetmek isteriz, çünkü sonsuzluğa kanat açmış şeylere ilişkin kestirimlerde bulunmanın zor olması hiç de şaşırtıcı değildir; ama bazı sınırlandırılmış değerleri –bu değer ne kadar büyük olursa olsun– asla aşamayan bir tahmini gerektirecek karar katı bir koşul getirmeyi de istemeyiz. Bir ara yol olarak da dizgenin gelecekte bir noktada aşağı yukarı mevcut durumuna geri dönmesini ve bunu tekrar tekrar gerçekleştirmesini isteriz. Geri dönmek için dilediği kadar süre kullanabilir ve biz de geri dönüşü mevcut noktaya daha önce hiç yaklaşmadığı kadar yakın bir geri dönüş olarak tanımlayabiliriz. Eğer bu gerçekleşirse, o zaman, yörüngenin *yinelendiği* söylenir. Şekerleme burada yine bir benzetme olabilir: eğer devinim kaotikse ve yeterince beklersek, iki şeker tanemiz yeniden bir araya gelecek ve her biri deneyin başında olduğu yerin yakınından geçecektir – o sırada birilerinin makineyi kapatmadığını varsayarsak.

III. Bölüm

BAĞLAM İÇİNDE KAOS: DETERMİNİZM, RASLANTISALLIK, GÜRÜLTÜ

Bütün doğrusal dizgeler birbirini andırır; oysa doğrusal olmayan her bir sistem kendi meşrebince doğrusal değildir.

Tolstoy'un *Anna Karenina*'sına öykünerek

Dinamik dizgeler

Kaos dinamik dizgelerin bir özelliğidir. Ve bir dinamik dizge de değişen gözlemler kaynağından başka bir şey değildir: Fibonacci'nin tavşanlı hayalî bahçesi, Londra'da bulunan Heathrow Havaalanı'ndaki bir termometrenin yansıttığı dünya atmosferi, IBM hisse senetlerinin fiyatı yoluyla izlenen ekonomi, ayın yörüngesini canlandıran ve gelecekteki her bir güneş tutulmasının tarih ve yerinin çıktısını veren bir bilgisayar programı.

En az üç farklı türde dinamik dizge bulunmaktadır. Kaos, en kolay, *matematiksel dinamik dizgeler* içinde tanım-

lanır. Bu dizgeler bir kuraldan oluşur: bir sayı girersiniz ve yeni bir sayı alırsınız; bu sayıyı girdiğinizde yepyeni bir sayı alırsınız ve bu kez onu girersiniz. Ve bu böyle devam eder. Bu sürece *yinelenme* (iteration) adı verilir. Fibonacci'nin hayalî bahçesinde her ay artan tavşanların sayısı bu tür bir dizgeden alınan bir zaman serisine kusursuz bir örnektir. İkinci tip dinamik dizge, fizikçinin, biyologun ya da borsa simsarının görgül dünyasında yer alır. Burada, gözlem zincirlerimiz gerçekliğin gürültü yüklü ölçümlerinden oluşmaktadır; bu ölçümler Tavşan Denkleminin gürültü içermeyen sayılarından temel olarak farklıdır. Bu *fiziksel dinamik dizgeler* içinde –örneğin, dünyanın atmosferi ve İskandinavya'daki tarla faresi sayısı– sayılar durumu temsil ederken, Tavşan Denkleminde sayılar durumun ta kendisidir. Gereksiz bir kafa karışıklığından uzak durmak için üçüncü bir durumun ayrımını yapmak yararlı olur: burada dijital bir bilgisayar matematiksel bir dinamik dizge tarafından belirlenen aritmetik işlemi gerçekleştirir. Buna *bilgisayar simülasyonu* adını vereceğiz – televizyon için hava tahminleri üreten bilgisayar programları sıradan bir örnektir. Farklı *türlerde* dizgeler bulunduğunu ve her birinin farklı bir varlık olduğunu anımsamak önemli: hava için gerçekleştirdiğimiz en iyi denklemler bu denklemlere dayanan en iyi bilgisayar modellerimizden farklılık gösterir ve bu dizgelerin ikisi de dünyanın atmosferi dediğimiz gerçek olgudan farklılık gösterir. Kafa karıştırıcı bir biçimde, üç tür dizgemizin her birinden gelen sayılara zaman serisi denmektedir ve bu zaman serilerini oluşturan şeyler arasındaki ayrımı sürekli olarak aklımızda tutmamız gerekir: birkaç hayalî tavşan, havaalanındaki gerçek sıcaklık

derecesi (eğer böyle bir şey varsa), bu sıcaklık derecesini temsil eden bir ölçüm, bu sıcaklık derecesinin bilgisayar simülasyonu.

Bu farklılıkların ne ölçüde önemli olduğu ne yapmayı amaçladığımıza bağlı. La Tour'un iskambil oyuncuları gibi, bilim insanları, matematikçiler, istatistikçiler ve felsefeciler de birbirlerinden farklı yetenek ve hedeflere sahiptir. Fizikçi gözlemleri matematiksel bir modelle betimlemeyi, belki de modeli gelecekteki gözlemleri tahmin etmekte kullanarak sınamayı hedefleyebilir. Fizikçimiz fiziksel uygunluk adına matematiksel sağlamayı feda eder. Matematikçiler çok sayıda dizge için geçerli olan şeyleri kanıtlamayı sever, ama kanıta o kadar çok değer verirler ki kanıta sahip olmak için bu dizge sayısını hangi genişlikte sınırlamak gerektiğine aldırış etmezler; bir matematikçinin "*hemen her*" (almost every) dediği işitildiğinde daima tetikte olmak gerekir. Fizikçimizin bunu unutmamaya dikkat etmesi ve matematiksel kullanılırlık ile fiziksel uygunluğu birbirine karıştırmaması gerekir; fiziksel sezgiler yalnızca matematiksel sağlama için tasarlanan "iyi anlaşılmış" dizgelerin niteliklerinden olumsuz etkilenmemelidir.

İstatistikçimiz gerçek gözlemlerin zaman serileri yoluyla ilginç istatistikleri betimlemekle ve gözlemlere benzeyen zaman serileri üreten dinamik dizgelerin özelliklerini incelemekle ilgilenirken her zaman olabildiğince az varsayımda bulunmaya dikkat eder. Son olarak, felsefecimiz gözlemleri ürettiğini ileri sürdüğümüz, derinlerde yatan fiziksel dizgeler, gözlemlerin kendileri ve bunları analiz etmek için yarattığımız matematiksel modeller ya da is-

tatistik teknikleri arasındaki ilişkileri sorgular. Örneğin, ölçtüğümüz sıcaklık derecesi ile (gerçekte böyle bir şey varsa) gerçek sıcaklık derecesi arasındaki ilişki hakkında neler bilebileceğimizle ve bilgimizin sınırlarının yalnızca çözümleyebileceğimiz pratik zorluklar mı yoksa prensipte asla başa çıkamayacağımız sınırlar mı olduğuyla ilgilenir.

Matematiksel dinamik dizgeler ve çekiciler (attractor)*

Zaman serilerinde dört farklı davranış tipi bulmaktayız. Zaman serileri (i) gitgide yavaşlayıp durabilir ve aynı sabit sayıyı bir bakıma tekrar tekrar yineleyebilir, (ii) kırık bir plak gibi kapalı bir döngü içinde zıplayabilir ve periyodik olarak aynı kalıbı yineleyebilir, (iii) birden fazla devri olan bir döngü içinde devinebilir ve bu nedenle de –günün belirli saatlerine göre salınan gelgit anı gibi– devinimi tam olarak yinelemese de buna çok yaklaşabilir, ya da (iv) hiçbir belirgin kalıp sergilemeyerek sonsuza kadar çılgınca –ya da belki de sakince– sıçrayabilir. Bu dördüncü tip raslantısal görünse de görünüm yanıltıcı olabilir. Kaos raslantısal görünebilir ama raslantısal değildir. Aslında, gittikçe daha iyi öğrendiğimiz üzere, kaos genellikle bize artık o kadar da raslantısal bile görünmemektedir. İzleyen birkaç sayfada birkaç denklem daha sunacağız – ama bu kez pirinç ya da tavşan olmadan. Bu denklemlere az önce belirttiğimiz

* Dinamik dizgelerde, bir dizgenin, kendisine doğru evrimleşme eğilimi gösterdiği fiziksel özellikler. (ç.n.)

davranış biçimlerini ararken ilginç malzemeler üretmek üzere gereksinim duymaktayız. Bu denklemlerden bazıları matematikçiler tarafından tam da bu amaçla üretildi, ama fizikçimiz, haklı olarak, münferit bir denklemin fizik yasaları basitleştirilerek türetildiğini ileri sürebilir. Gerçekte, denklemler, her biri çeşitli yollardan elde edilebilecek kadar basittir.

Bir denklemi devreye sokarak bir zaman serisi üretmeden önce başlangıç için bir sayıya gerek duymaktayız. Bu ilk sayıya *başlangıç şartı*, sistemimizin var olması için tanımladığımız, keşfettiğimiz ya da düzenlediğimiz bir başlangıç *durum*u demekteyiz. II. Bölüm'de olduğu gibi, dizgemizin durumu için kısaltma olarak X simgesini benimsiyoruz. Olası bütün X durumlarının toplamı *durum uzamı* olarak adlandırılır. Fibonacci'nin hayalî tavşanları açısından, bu, bütün katsayıların seti olacaktır. Zaman serimizin yer yıl yaz ortasında her bir kilometrekareye düşen ortalama böcek sayısının bir modelinden alındığını düşünelim. Bu durumda, X yalnızca bir rakamdır ve durum uzamı da –bütün olası durumların toplamı olarak– bir çizgidir. Bazen durumu tanımlamak için bir sayıdan fazlası gerekir ve eğer durum böyleyse X birden fazla bileşene sahip olacaktır. Avcı-av modellerinde, örneğin, her ikisinin de nüfusu gerekir ve X de iki bileşene sahiptir: bir yöneydir. X her yıl Ocak ayının birinde hem tarla farelerinin (av) sayısını hem de gelinciklerin (avcı) sayısını içeren bir yöneyse, o zaman, durum uzamı bütün sayı çiftlerini içeren iki boyutlu bir yüzey –bir düzlem– olacaktır. Eğer üç bileşene sahipse (diyelim ki, tarla fareleri, gelincikler, yıllık kar yağış miktarı), o zaman da durum uzamı bütün sayı üçlülerini

içeren üç boyutlu bir uzam olacaktır. Elbette, üç bileşenle yetinmek için bir neden yok; daha yüksek boyutlarda tabloyu çizmek daha zor hale gelse de, modern hava tahmin modellerinin 10.000.000'dan fazla bileşeni vardır. Matematiksel bir dizge açısından X sürekli bir alan bile olabilir – okyanus yüzeyinin yüksekliği ya da dünya yüzeyinin her bir noktasındaki sıcaklık derecesi gibi. Ama fiziksel dizgelere ilişkin gözlemlerimiz asla bir yöneyden daha karmaşık olmaz ve yalnızca sınırlı sayıda şeyleri ölçeceğimiz için de gözlemlerimiz daima üç boyutlu yöneyler olacaktır. Şimdilik X'in basit bir sayı –örneğin bir buçuk– olduğu durumlarla ilgileneceğiz.

Matematiksel bir denklemin yalnızca bir değerler setini bir sonraki değerler setine dönüştüren bir kural olduğunu anımsayarak, Dörtle Çarpma Denklemi'ni şu kuralla tanımlayabilirsiniz:

X'i dörtle çarparak X'in yeni değerini oluşturun.

X eşittir bir buçuk gibi bir başlangıç şartı karşısında, bu dinamik matematiksel dizge X'in değerlerinin bir zaman serisini üretir; bu örnekte ½ x 4 = 2, 2 x 4 = 8, 8 x 4 = 32, (...) ve zaman serisi de 0.5, 2, 8, 32, 128, 512, 2048... Ve bu böylece gider. Bu seri gitgide büyür ve dinamik açıdan bu o kadar da ilginç değildir. Eğer X'in bir zaman serisi bunun yaptığı gibi sınırsız büyürse, ona *sınırsız* demekteyiz. X'in sınırsız olduğu bir dinamik dizgeye sahip olmak için ikinci bir örneği ele alacağız: Çeyrekleme Denklemi:

Dörde bölünen X'i yeni X olarak alın.

$X = ½$ ile başlamak 1/8, 1/32, 1/128... zaman serisini üretir. İlk bakışta bu pek ilginç değil, çünkü X hızla sıfır yönünde azalmakta. Ama, aslında, Çeyrekleme Denklemi özel matematiksel özellikler örnekleyecek biçimde özenle tasarlanmıştır. Kökene –X = 0 durumuna– *sabit nokta* denir: eğer oradan başlarsak hiçbir yere gidemeyiz, çünkü dörde bölünen sıfır yine sıfırdır. Köken aynı zamanda bizim ilk *çekici*mizdir; Çeyrekleme Denklemi'nde köken erişilmez ama kaçınılmaz varış noktasıdır: eğer X'in başka bir değeriyle başlarsak, aslında, çekiciye asla varamayız ama yinelenmelerin sayısı sınırsız olarak artarken ona gitgide yaklaşırız. Ne kadar yaklaşırız? Olabildiğince yakın. İstediğiniz kadar yakın. *Son derece* yakın, yani dile getirebileceğiniz herhangi bir sayıdan daha yakın. Bir sayı söyleyin, herhangi bir sayı; X'in sıfıra o sayıdan daha yakın olmasını sağlayacak kaç tane yinelenme gerekeceğini hesaplayabiliriz. Zaman geçtikçe bir çekiciye gelişigüzel yaklaşırken ona asla erişememek doğrusal olmayan dizgelerden alınan birçok zaman serisinin ortak bir özelliğidir. Sarkaç buna fiziksel bir örnektir: her bir salınım bir öncekinden daha küçüktür – suçlunun hava direnci ve sürtünme olduğu bir durum bu. Bu örnekte çekici ile benzer nitelikleri taşıyan şey dosdoğru aşağı sarkan hareketsiz sarkaçtır. Listemize birkaç dinamik dizge daha ekledikten sonra çekiciler hakkında söyleyecek daha fazla şeyimiz olacak.

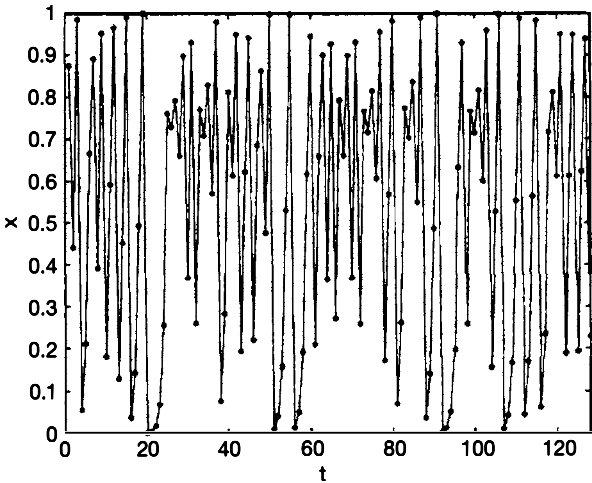
Tam Lojistik Denklem'de hemen her X'ten gelen zaman serisi sıfır ile sonsuz arasında düzensiz bir biçimde sıçrar:

> X'ten X^2'yi çıkarın ve farkı dörtle çarpıp sonucu yeni X olarak alın.

Eğer durum değişkenlerinin bileşenlerini diğer bileşenlerle çarparsak, işler doğrusal olmayan bir hal alır. Yine X eşittir bir buçukla başlarsak, bu durumda, zaman serisi ne olur? ½ ile başladığımızda, X eksi X^2 ¼ olur, dörtle çarpıldığında da bir çıkar; şu halde, yeni değerimiz bir. Şimdi X eşittir 1 ile devam ettiğimizde X eksi X^2 sıfır olur. Ama dört çarpı sıfır daima sıfırdır; bu nedenle de sonsuza kadar sıfır sonucunu alırız. Zaman serimiz de 0.5, 1, 0, 0, 0, (...) olur. Çok sıkıcı sayılmasa da ilgi çekici olduğu da söylenemez; "hemen her" hakkındaki uyarıyı anımsayın.

Bir zaman serisindeki sayıların sıralaması –seri ister Fibanocci'nin tavşanlarının aylık değerlerini, ister Tam Lojistik Denklem'in yinelenmelerini yansıtsın– önemlidir. II. Bölüm'de önerilen kısaltmayı kullanarak X'in beşinci yeni değeri için X_5, başlangıçtaki durum (ya da gözlem) için X_0 ve genel olarak da i'inci değer için X_i yazacağız. İster denklemi yineliyor olalım, ister gözlemlerde bulunuyor olalım, i daima bir tamsayıdır ve genellikle "zaman" olarak adlandırılır.

X_0'ın 0.5'e denk olduğu Tam Lojistik Denklem'de X_1 eşittir 1, X_2 eşittir 0, X_2 eşittir 0, X_3 eşittir 0 ve X_i de dörtten büyük bütün i'ler için 0 olacaktır. Ama Tam Lojistik Denklem'de X'in küçük değerleri büyümektedir (bunu hesap makinesiyle kontrol edebilirsiniz), X = 0 istikrarsızdır ve bu nedenle de köken çekici değildir. Kökene yakın başlatılan bir zaman serisinin aslında bu bölümün başında dile getirilen ilk üç seçenekten herhangi birini alması olanaklı görünmez; bunun yerine kaotik bir biçimde sonsuza kadar sıçraması olasıdır.



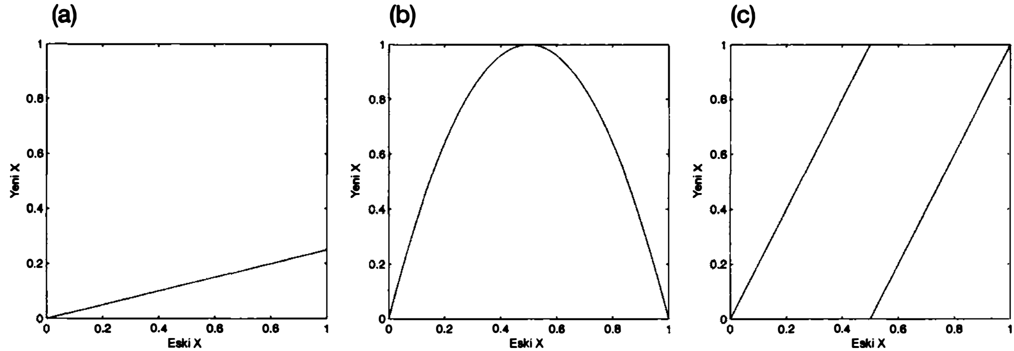
7. X eşittir 0.876'ya yakın başlayan Tam Lojistik Denklem'den kaotik bir zaman serisi. Dikkat ederseniz, X'in sıfır ve üç çeyreğe yakın olduğu noktalarda seri görünür biçimde tahmin edilebilir.

Şekil 7'de X_0 eşittir 0.876 yakınında başlayan bir zaman serisi gösterilmekte: bu zaman serisi Tam Lojistik Denklem'den kaotik bir zaman serisini temsil ediyor. Ama yakından bakın: gerçekten de tamamen önceden tahmin edilemez mi görünüyor? Görünüşe göre, X'in küçük değerlerinin ardından X'in küçük değerleri gelmekte ve zaman serisi de üç çeyreğe yaklaştığı anda takılıp kalma eğilimi göstermekte. Fizikçimiz bu seriye bakıp en azından bazen tahmin edilebilir olmasını bekleyecektir; istatistikçimiz ise, birkaç hesaplamanın ardından, raslantısal olduğunu bile ilan edebilir. Biz bu yapıyı görebilsek bile, en yaygın istatistik testler bunu göremiyor.

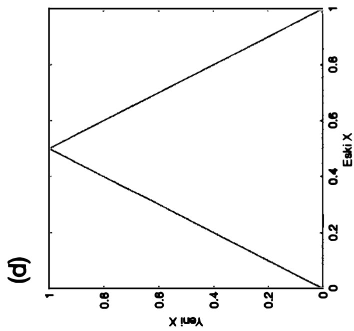
Bir denklemi tanımlayan kural ya sözcüklerle, ya bir eşitlik olarak ya da grafik biçiminde ifade edilebilir. Şekil 8'de her bir panel kuralı grafik açıdan tanımlamaktadır. Grafiği kullanmak için yatay eksende X'in mevcut değerini bulun ve sonra eğriye gelene kadar dosdoğru yukarı ilerleyin; dikey eksendeki eğri üzerinde bulunan bu noktanın değeri X'in yeni değeridir. Tam Lojistik Denklem grafik olarak Şekil 8 (b)'de, Çeyrekleme Denklemi de panel (a)'da verilmektedir.

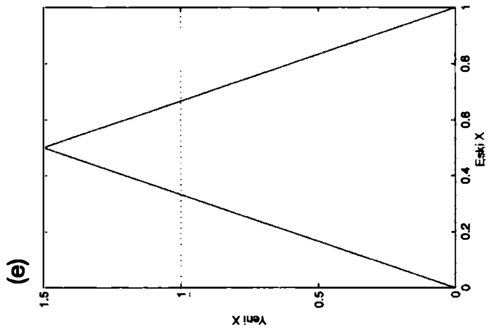
Bir sabit noktanın istikrarsız olup olmadığını anlamak için grafiği kullanmanın kolay bir yolu, sabit noktada denklemin eğimine bakmaktır: eğer eğim 45 dereceden dikse (yukarı ya da aşağı), o zaman, sabit nokta istikrarsızdır. Çeyrekleme Denklemi'nde eğim her yerde birden az iken Tam Lojistik Denklem'de kökenin yakınındaki eğim birden büyüktür. Burada X'in küçük ama sıfırdan büyük değerleri her bir yinelenme ile büyür – ama ancak yeterince küçük kaldıkları sürece (½ yakınındaki eğim sıfırdır). Aşağıda göreceğimiz gibi, sıfır ile bir arasındaki *hemen her* başlangıç şartı için zaman serisi gerçek bir matematiksel *kaos* sergiler. Tam Lojistik Denklem oldukça basittir, kaos ise oldukça yaygın.

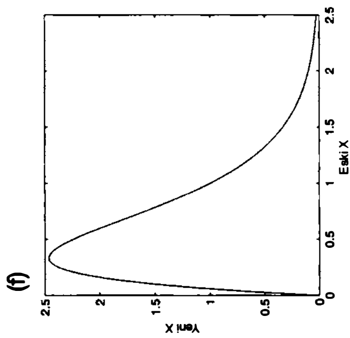
Matematiksel bir dizgenin *determinist* olup olmadığını anlamak yalnızca kuralı uygulamanın raslantısal bir sayı gerektirip gerektirmediğini dikkatle incelemeyi şart koşar. Bu şart değilse, o zaman, dinamik dizge deterministtir: ne zaman X'in aynı değerini girsek X'in aynı yeni değerini alırız. Eğer kural raslantısal bir sayı gerektiriyorsa



8. (a) Çeyrekleme Denklemi, (b) Tam Lojistik Denklem, (c) Kaydırma Denklemi, (d) Çadır Denklemi, (e) Üçlü Çadır Denklemi ve (f) Moran-Ricker Denklemi'nin grafik anlatımları.


(d)
Yeni X
Eski X


(e)
Yeni X
Eski X


(f)
Yeni X
Eski X

(gerçekten de gerektiriyorsa), o zaman, dizge raslantısaldır – ayrıca *düzensiz* (stokastik) olarak da adlandırılır. Düzensiz bir dizgede, başlangıçtaki koşulun tamamen aynısını yinelesek bile, X'in sonraki değerinin ayrıntılarının ve dolayısıyla zaman serisinin farklı olmasını bekleriz. Bu tanımlara dönüp baktığımızda, yukarıda betimlenen üç denklemin her birinin determinist olduğunu görürüz; gelecek zaman serileri tamamen başlangıç şartı tarafından belirlenmekte ve bundan da "determinist dizge" adı doğmaktadır. Felsefecimiz yalnızca X'i bilmenin yeterli olmadığını, matematiksel dizgeyi de bilmemiz gerektiğini ve ayrıca bununla doğru hesaplamalar yapma gücüne sahip olmamız gerektiğini belirtecektir. Bunlar 200 yıl önce Laplace'ın şeytanının sahip olması gerektiğini belirttiği üç niteliktir.

İlk düzensiz dinamik dizgemiz AC Denklemi:

> X'i dörde bölün, sonra ½ çıkartıp raslantısal bir R sayısı ekleyip yeni X sayısını elde edin.

AC Denklemi düzensiz bir dizge, çünkü kuralı uygulamak bir raslantısal sayılar kümesine erişimi gerektirmiyor. Aslında, yukarıdaki kural tam sayılmaz çünkü R'nin nasıl alınacağını belirtmiyor. Tanımı tamamlamak için şöyle bir şey eklememiz gerekir: her bir yinelemedeki R için sıfır ile bir arasında bir sayı seç ve bu sayıyı da her bir sayının seçilme şansının eşit olmasını sağlayarak yap; böylece, R sıfır ile bir arasında birörnek (uniform) dağılacak ve R'nin gelecek değerinin bir değerler aralığına düşme olasılığı bu aralığın genişliğiyle orantılı olacaktır.

R'yi seçmek için hangi kuralı kullanacağız? Determinist bir kural olamaz, çünkü o zaman R raslantısal olamaz. Kuşkusuz, R değerlerini üretmek için sonlu bir kural bulunmamaktadır. Bunun sıfır ile bir arasında birörnek sayılara gereksinim duymakla hiçbir ilişkisi yok. Galton'ın "çan şeklindeki" dağılımını taklit eden raslantısal sayılar üretmek istesek aynı sorunla karşılaşırdık. İstatistikçinin bir yolunu bulup bize gerekli raslantısal sayıları bulmasına güvenmemiz gerekecektir; bu noktadan sonra, yalnızca birörnek bir dağılım mı yoksa çan eğrisi biçiminde bir dağılım mı sergilediklerini belirteceğiz.

AC Denklemi'nde R'nin her bir değeri denklem içinde kullanılır, ama R değerini bir formül içinde değil de neler yapılacağı konusunda kararlar almak için kullanır görünen başka bir raslantısal denklemler sınıfı –bunlara Yinelenmiş İşlevler Dizgesi ya da kısaca YİD denir– bulunmaktadır. Bunun bir örneği Orta Üçüncüler YİD Denklemi'dir; denklemlerin özelliklerini denklemlerin var ettiği zaman serilerinden çıkarmaya çalıştığımızda bu denklem işimize yarayacak. Orta Üçüncüler YİD Denklemi şudur:

> Sıfır ile bir arasındaki birörnek dağılımdan raslantısal bir R sayısı alın.
>
> Eğer R yarımdan az ise yeni X olarak X/3'ü alın.
>
> Aksi halde, yeni X olarak 1 – X/3'ü alın.

Artık elimizde birkaç matematiksel dizge var ve bunların determinist mi yoksa düzensiz mi olduklarını kolaylıkla söyleyebiliyoruz. Dijital bilgisayar simülasyonları daima deterministtir. VII. Bölüm'de göreceğimiz gibi, dijital

bir bilgisayardan gelen zaman serisi ya kendisini periyodik olarak yineleyen sonsuz bir değerler döngüsü içindedir ya da böyle bir döngüye girmek üzeredir. Değerin yinelendiği, yörüngenin bir *periyodik döngü* yönünde evrimleştiği ama ona erişmediği bir zaman serisinin bu ilk parçasına bir *geçici* (transient) denir. Matematik çevrelerinde bu sözcük adeta bir hakaret anlamı taşır, zira matematikçiler geçicilerle değil uzun ömürlü şeylerle çalışmayı tercih eder. Matematikçiler geçicilerden kaçınırken fizik bilimlerle uğraşanlar geçicilerden başka bir şeyle karşılaşamıyor olabilir ve –işin ilginci– dijital bilgisayarlar da bunları düzeltemez. Tuhaftır ki, kaosu anlamamızda çok önemli rol oynayan dijital bilgisayarların kendileri gerçek bir matematiksel kaos sergiler. Bir dijital bilgisayar da raslantısal sayılar üretemez. Dijital bilgisayarlardaki ve hesap makinelerindeki sözümona raslantısal sayı üreticiler aslında sahte raslantısal sayı üreticilerdir; hatta bu üreticilerin ilklerinden biri Tam Lojistik Denklem'e dayanmaktaydı! Matematiksel kaos ile bilgisayar simülasyonları arasındaki fark –raslantısal sayılar ile sahte raslantısal sayılar arasındaki fark gibi– bizim matematiksel dizgelerimiz ile bilgisayar simülasyonlarımız arasındaki farkı örnekler.

Şekil 8'deki denklemler raslantı sonucu orada değil. Matematikçiler genellikle dizgeleri bir matematiksel konuyu örneklemeleri ya da özel bir işletimin (bu sözcüğü bazen teknik el çabukluğunu gizlemek için kullanırlar) uygulanmasını sağlamaları nispeten kolay olacak biçimde oluşturur. Gerçekten de, karmaşık denklemler –bunlara uzay araçlarını yönlendirmek için kullanılanlar ile "iklim modelleri" olarak adlandırılanlar ve hatta sayısız hava tahmininde kullanılan daha büyük boyutlular dâhildir– ke-

sinlikle matematikçiler değil, fizikçiler tarafından yaratılır. Ama hepsi de aynı biçimde çalışır: bir X değer girer ve yeni bir X değer çıkar. Mekanizma yukarıda tanımlanan basit denklemlerde olanın tamamen aynısıdır, X bazen 10.000.000'dan fazla bileşene sahip olsa bile.

Parametreler ve model yapı

Yukarıdaki denklemleri tanımlayan kuralların her biri durumdan (state) farklı sayılar içerir – dört ve yarım gibi. Bu sayılara *parametreler* denir. X zamanla değişirken parametreler sabit kalır. Bazen farklı parametre değerleri kullanarak zaman serisinin özelliklerini karşılaştırmak yararlıdır. Böylece, denklemi 4 gibi belirli bir parametre değeriyle tanımlamak yerine, denklemler genellikle parametre için α gibi bir simge kullanılarak tanımlanır. Ardından α eşittir 4 durumunda denklemin davranışını örneğin $\alpha = 2$ ya da $\alpha = 3.359945$ durumundakiyle karşılaştırabiliriz. Parametreleri durum değişkenlerinden net bir biçimde ayırt etmek için genellikle Yunan simgeleri kullanılır. Tam Lojistik Denklemi bir parametreyle yeniden yazmak doğrusal olmayan dinamiğin en ünlü dizgelerinden birini ortaya çıkarır: Lojistik Denklem:

> X'ten X^2'yi çıkarın, sonra α ile çarpın ve yeni değeri X olarak alın.

Fiziksel modellerde parametreler suyun kaynama noktası ya da dünyanın kütlesi, ışığın hızı, hatta buzun atmos-

ferin üst katmanlarındaki "düşüş" hızı gibi şeyleri temsil etmek için kullanılır. İstatistikçiler genellikle parametre ile durum arasındaki farkı bir kenara bırakırken, fizikçiler parametrelere özel statü verme eğilimindedir. Uygulamalı matematikçiler de genellikle parametreleri büyük ya da son derece küçük değerlere doğru zorlar; örneğin, sonsuz ölçüde uzun bir rüzgâr karşısında havanın akışını incelemek daha kolaydır. Bir kez daha, bu farklı bakış açıları bağlam içinde bir anlam taşır. Yaklaşık bir soruya kesin bir çözüm mü istiyoruz, yoksa belirli bir soruya yaklaşık bir yanıt mı? Doğrusal olmayan dizgelerde bunlar çok farklı şeyler olabilir.

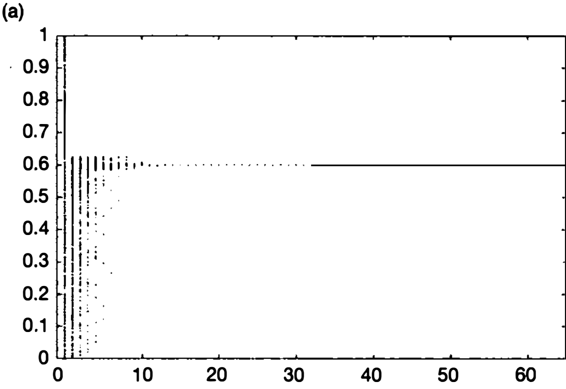
Çekiciler

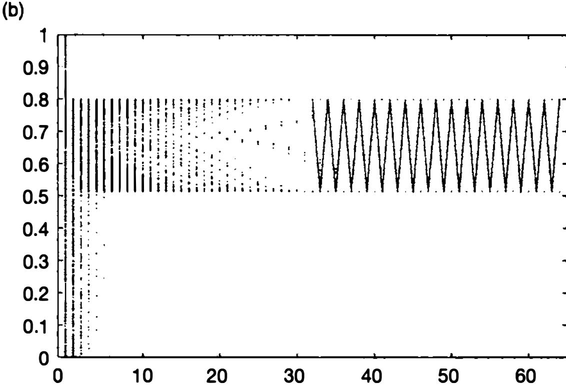
Çeyrekleme Denklemi'ni anımsayalım ve bir yinelenmeden sonra sıfır ile bir arasındaki her bir noktanın sıfır ve çeyrek olacağına dikkat edelim. Sıfırla çeyrek arasındaki bütün noktalar da sıfır ve bir arasında yer aldığına göre, bu noktaların hiçbiri birden büyük ya da sıfırdan az değerlere sapma gösteremez. İçindeki dizi parçaları (ya da daha büyük boyutlarda alan ya da hacimleri) daralan dinamik dizgelere *yitirgen* (dissipative) adı verilir. Yitirgen bir denklem bir durum uzamı oylumunu tamamen kendi içinde dönüştürdüğünde onun neye benzediğini bilmesek bile bir çekicinin var olduğunu hemen anlarız.

α dörtten az olduğunda, sıfır ile bir arasındaki bütün noktalara neler olduğuna bakarak Lojistik Denklem'in bir çekicisi olduğunu kanıtlayabiliriz. Elde edebileceğimiz en

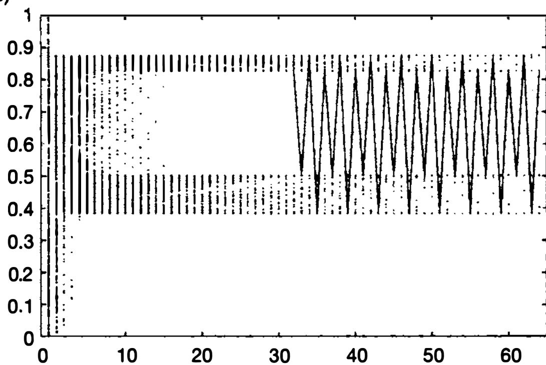
büyük yeni X değeri X eşittir yarım yinelenmesidir. (Bunu Şekil 8'de görebiliyor musunuz?) Bu en büyük değer $\alpha/4$'tür ve α dörtten küçük olduğu sürece de en büyük değer birden küçüktür. Bu da demektir ki, sıfır ile bir arasındaki her bir nokta sıfır ile $\alpha/4$ arasında bir noktada yinelenir ve oraya sonsuza kadar bağımlıdır. Şu halde, dizgenin bir çekicisi olmalı. α'nın küçük değerleri için X eşittir sıfır çekicidir, tıpkı Çeyrekleme Denklemi'nde olduğu gibi. Ama eğer α birden büyükse, o zaman X'in sıfıra yakın olduğu herhangi bir değer uzaklaşacaktır ve çekici de başka bir yerdedir. Bu, yapıcı olmayan kanıta bir örnek: bir çekicinin var olduğunu kanıtlayabiliriz ama, ne yazık ki, bu kanıt bize onu nasıl bulacağımızı söylemez, özellikleri hakkında ipuçları sağlamaz!

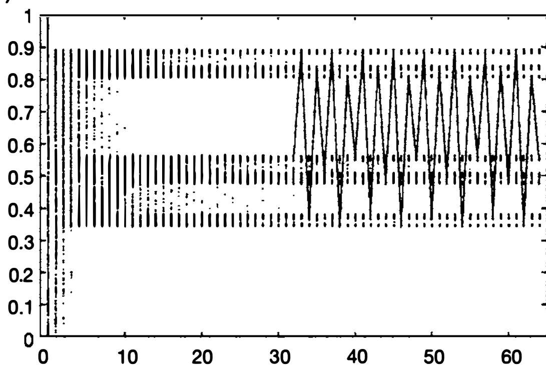
α'nın dört farklı değerinin her biri için Lojistik Denklem'in çoklu zaman serisi Şekil 9'da gösterilmektedir. Her bir panelde sıfır ile bir arasından raslantısal olarak alınmış 512 noktayla başlıyoruz. Her bir adımda noktaların tamamını zaman içinde ileri taşıyoruz. Birinci adımda hepsinin de sıfırdan büyük kalmayı sürdürdüklerini ama X eşittir 1'den de bir daha dönmemek üzere uzaklaştıklarını görüyoruz: bir çekicimiz var. (a)'da hepsinin nokta bir döngüsüne kapıldığını görüyoruz; (b)'de nokta iki döngüsü içindeki iki noktadan birine; (c)'de nokta dört döngüsündeki dört noktadan birine. (d)'de de bir döngüye kapıldıklarını görebiliyoruz ama bu açık değil. Dinamiği çok daha görünür kılmak için topluluğumuzun bir üyesi grafiğin ortasından raslantısal olarak seçiliyor ve izlediği yörüngenin noktaları bu noktadan sonra bir çizgiyle birleştiriliyor. Nokta bir döngüsü olan (a) doğru bir hat olarak





9. Her bir çerçeve önce sıfır ile bir arasında raslantısal yayılıp Lojistik Denklem'e göre ileri hareket eden 512 noktanın gelişimini gösterir. Her bir panel α için dört farklı değeri gösterir; (a) bir sabit noktaya, (b) bir nokta iki döngüsüne, (c) bir nokta dört döngüsüne ve (d) kaosa kaymayı işaretler. Süre 32'de başlayan koyu çizgi tek bir noktanın yörüngesini –her bir çekiciye giden yolun görünür kılınması için– gösterir.


(c)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60


(d)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40
50
60

görünürken, (b) ve (c) iki ve dört nokta arasında gidip gelen yörüngeler çiziyor. (d) ilk önce bir nokta dört döngüsüne benzese de, yakından bakıldığında dört opsiyondan çok daha fazlasının olduğu ve noktaların bantlarından geçişlerde bir düzen olsa da sabit bir düzenli geçiş aralığının görünmediği izleniyor.

Aynı olgunun farklı bir tablosunu elde etmek için birçok farklı başlangıç şartını ve aynı zamanda α için farklı değerleri inceleyebiliriz – Şekil 13'te gösterildiği gibi. Bu üçboyutlu görüşte, başlangıçtaki durumların kutunun sol arkasında raslantısal olarak dağıldıkları görülebilir. Her yinelenmede size doğru ilerlerler ve noktalar önceki iki şekilde gösterilen yapıları oluşturmaya yönelir. Yinelenmiş ilk raslantısal durumlar 0, 2, 8, 32, 128 ve 512 yinelenme ardından gösteriliyor; geçicilerin ortadan kalkması biraz zaman almakta ama durumlar kutunun önüne ulaştıkça tanıdık yapıların belirmeye başladıkları görülebilir.

Model parametrelerini ayarlama ve yapısal istikrar

Artık dinamik dizgelerin üç bileşeni olduğunu görebiliyoruz: gelecek değerin nasıl elde edileceğini tanımlayan matematiksel kural, parametre değerleri ve mevcut değerdir. Elbette, bunlardan herhangi birini değiştirebilir ve neler olup bittiğine bakabiliriz; ama ne tür bir değişiklik yaptığımızın farkında olmak yararlı olur. Benzer biçimde, bu bileşenlerden herhangi birindeki belirsizlik hakkında bir görüşümüz olabilir ve bileşenlerin birindeki belirsizliği

hatalı bir biçimde başka bir bileşene atfederek hesaba katmaktan kaçınmak yararımıza olur.

Fizikçimiz "Doğru" ya da yalnızca yararlı bir model peşinde olabilir. Uygulamada, parametre değerlerini "ayarlamak" bir sanattır. Doğrusalsızlık "iyi parametre değerleri"ni nasıl bulduğumuzu yeniden dikkate almamızı gerektirse de, kaos bizi "iyi" ile ne demek istediğimizi yeniden değerlendirmeye zorlayacaktır. Bir parametrenin değerinde, kısa vadeli tahminin kalitesi üzerinde dikkate bile değmeyecek bir etki yaratan çok küçük bir farklılık, bir çekicinin şeklini tanınmaz hale gelecek biçimde değiştirebilir. Bunun gerçekleştiği dizgelere *yapısal açıdan istikrarsız* denir. Hava tahmincilerinin bu konuda endişelenmelerine gerek olmasa da, iklim modeli oluşturanların endişelenmesi gerekir; Lorenz'in 1960'larda belirttiği gibi.

Mevcut durumdaki belirsizlik, bir parametrenin değerindeki belirsizlik ile model yapının kendisiyle bağlantılı belirsizliği birbirinden ayırt edememekten ötürü büyük bir keşmekeş yaratıyor. Teknik açıdan, kaos, sabit eşitliklere (yapı) ve belirlenmiş parametre değerlerine sahip dinamik bir dizgenin bir özelliğidir ve bu nedenle de kaosun üzerinde işlediği belirsizlik yalnızca başlangıç durumundaki belirsizliktir. Uygulamada bu ayrımlar silinmekte ve durum çok daha ilginç –ve kafa karıştırıcı– hale gelmekte.

Güneş lekelerinin istatistiksel modelleri

Kaos yalnızca determinist dizgelerde bulunur. Ama bilim üzerindeki etkisini anlamak için onu geçen yüzyılda

geliştirilmiş geleneksel düzensiz modelleri göz önünde bulundurarak incelememiz gerekir. Ne zaman doğada yinelenen bir şey görsek, periyodik devinim kullanılması gereken ilk hipotezlerden biridir. Sizi meşhur da yapabilir: örneğin, Halley kuyrukluyıldızı, Wolf güneş lekelerinin sayısı. Sonuçta, olgunun gerçekte periyodik olmadığını anladığımızda bile, genellikle ad kalıcı olur. Wolf elinde 20 yıldan az bir sürenin verileri varken Güneş'in 11'er yıllık bir döngüden geçtiği tahmininde bulundu. Bir fiziksel dizgenin, elimizde ne kadar veri olursa olsun, periyodik olduğunu kanıtlamak olanaksız olsa da belli aralıklarla gerçekleşmesi yine de yararlı bir kavram. Tıpkı determinizm ve kaos kavramları gibi.

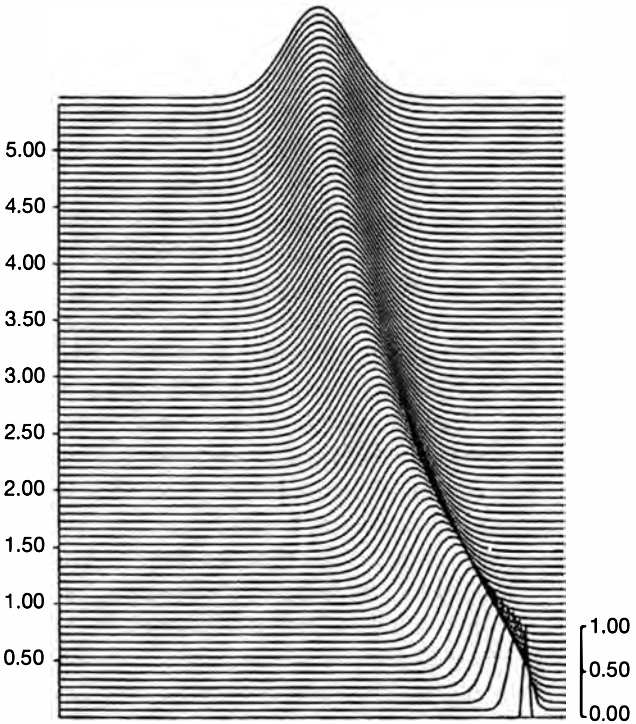
Güneş kayıtları hava durumuyla, iktisadi etkinlikle, insan davranışıyla korelasyonlar gösterdi; 100 yıl önce bile 11'er yıllık döngü ağaç halkalarında "görülebiliyordu". Güneş lekeleri döngüsünü nasıl modellendirebiliriz? Sürtünmesiz sarkaç modelleri kusursuz düzeyde periyodiktir, ama güneş döngüsü öyle değildir. 1920'lerde İskoç istatistikçi Udny Yule yeni bir model yapı keşfederek modele raslantısallığın nasıl nüfuz ettiğini ayrımsadı ve daha gerçekçi görünen bir zaman serisi davranışı elde etti. Güneş lekelerinin gözlenmiş zaman serilerini yavaşlatılmış bir sarkaç modelinden elde edilen zaman serilerine benzetti – sürtünmeye sahip sarkaç yaklaşık 11 senelik bir serbest periyoda sahip olacaktı. Eğer bu model sarkaç "sessiz bir odada kendi başına bırakılırsa", ortaya çıkan zaman serisi ağır ağır yavaşlayıp duracaktı. Matematiksel modeli sürdürmek üzere raslantısal sayıları buna dâhil edişini güdülemek için, Yule, benzetmeyi fiziksel bir sarkaçla genişlet-

ti: "Ne yazık ki, ellerinde bezelye atan borularla oğlanlar odaya girip sarkacı dört bir yandan rasgele hedef alıyor." Sonuçta ortaya çıkan modeller istatistikçinin cephanelerinde başköşeyi tutar hale geldi. Doğrusal, düzensiz bir temel malzeme. Yule Denklemi'ni şöyle tanımlayalım:

> α kez X artı raslantısal bir R değerini X'in yeni değeri olarak al; burada R standart çan eğrisi dağılımından raslantısal olarak alınmış olsun.

Peki, bu düzensiz modelin kaotik modelden farkı ne? Matematikçinin dikkatini hemen çekecek iki fark söz konusu: birincisi, Yule'un modelinin düzensiz olması –kural bir raslantısal sayı üreteci gerektirmekte– ve Güneş lekelerinin kaotik modelinin tanım gereği determinist olması. İkincisi, Yule'un modelinin doğrusal olması. Bu da denklemin tanımında durumun bileşenlerini birlikte derlemediğimiz gerçeğinden daha fazlasını anlatmakta; aynı zamanda dizgenin çözümlerini birleştirebileceğimiz ve diğer kabul edilebilir çözümleri de dikkate alabileceğimiz anlamını taşıyor – bu özelliğe *üstdüşüm* (superposition) denir. Bu çok yararlı özellik doğrusal olmayan dizgelerde mevcut değildir.

Yule gerçek Güneş lekelerinin zaman serilerine daha benzer davranan ve Yule Denklemi'ne benzer bir model geliştirdi. Yule'un geliştirilmiş modelinde döngüler raslantısal etkilerden –bezelye atanlar– ötürü bir döngüden diğerine farklılık gösterir. Kaotik bir modelde Güneş'in durumu bir döngüden diğerine değişir. Peki ya *tahmin edilebilirlik?* Her türlü kaotik modelde yakındaki başlan-



10. Düzensiz Yule Denklemi altında belirsizliğin evrimleşmesi. Grafiğin alt tarafında bir nokta olarak başlayan belirsizlik, biz zamanda (yukarı doğru) ilerledikçe sola yayılır ve sabit bir çan eğrisi dağılımına yaklaşır.

gıç durumlarının neredeyse tamamı sonuçta uzaklaşırken Yule'un modellerinin her birinde çok daha uzak başlangıç durumları bile bir noktada birleşecektir – *eğer ki* her ikisi de bezelye atanlardan aynı ölçüde etkilendiyse. Bu, ilginç

ve oldukça temel bir fark: benzer durumlar determinist dinamik altında birbirinden ayrılırken doğrusal düzensiz dinamik altında bir noktada birleşmektedir. Bu durum Yule'un modelini tahminde bulunması daha kolay hale getirmez ama belirsizliğin dizge içinde evrimleşme biçimini değiştirir – Şekil 10'da gösterildiği gibi. Burada, alt taraftaki küçük, hatta ilk başlarda sıfır değerli bir belirsizlik her bir yinelenmede daha da genişler ve sola doğru ilerler. Dikkat ederseniz, durumdaki belirsizlik çan eğrisi şeklinde bir dağılıma yaklaşıyor gibidir ve grafiğin tepesine erişene kadar da aşağı yukarı istikrar kazanmıştır. Belirsizlik statik bir durumda doygunluğa ulaştığında, bütün tahmin edilebilirlik yok olur; bu nihai dağılıma modelin "iklim"i denir.

Fiziksel dinamik dizgeler

> "Determinizmin" ya da tersinin konumunun doğruluğunu kanıtlamanın hiçbir yolu yok. Ancak ve ancak bilim eksiksiz ya da gösterilebilir düzeyde olanaksız olsaydı böyle sorularda bir karara varabilirdik.
>
> E. Mach (1905)

Dünyada matematiksel modellerden fazlası vardır. Gerçek dünyada ölçmeyi istediğimiz her şeyin, hatta yalnızca gözlemlemeyi düşündüklerimizin bile fiziksel bir dinamik dizgeden geldiği görülebilir. Bu, güneş sisteminde gezegenlerin konumu, titreşen bir düzlemde bir sehpanın yüzeyi, bir göldeki balık sayısı, bir arazideki kazların sayısı ya da yazı tura için atılan bir bozukluk olabilir.

Şimdi, izlemek istediğimiz zaman serisi, fiziksel dizgenin durumuna karşılık geliyor: örneğin, Güneş'e göre dokuz gezegenimizin konumu, balıkların ya da kazların sayısı. Kısaltmak açısından, yine dizgenin durumuna X diyeceğiz ve bu arada da bir model-durum ile –eğer böyle bir şey var ise– Gerçek durum arasında temel bir farkın mevcut olduğunu unutmamaya çalışacağız. Bu kavramların birbirleriyle ilişkilerinde nasıl durdukları net değil; XI. Bölüm'de göreceğimiz gibi, bazı felsefecilere göre, kaosun keşfedilmesi, gerçek dünyanın özel matematiksel özellikleri olması gerektiği anlamını taşımaktadır. Başka felsefecilere –belki de bazen aynı felsefecilere– göre ise kaosun keşfedilmesi matematiğin dünyayı betimlemediği anlamını taşımaktadır. Felsefeciler böyledir işte.

Her neyse, eğer gerçekten varsa bile, fiziksel bir dizgenin Gerçek durumuna asla erişemeyiz. Sahip olduklarımız gözlemlerdir – bunları dizgenin durumunu anlatan X'ten ayırmak için "S" olarak adlandıracağız. X ile S arasındaki fark nedir? Değeri anlaşılamamış kahraman: *gürültü*. Gürültü, karşı karşıya geldikleri durumlarda deneyselcilerle kuramcıları birbirine bağlayan tutkaldır. Gürültü aynı zamanda kuramların tuhaf gerçekler üzerinde rahatça kaymasını sağlayan yağdır.

Gözlemleri üreten matematiksel modeli bildiğimiz ve ayrıca gürültü her ne ise onu neyin ürettiğine ilişkin bir *gürültü modeli*ni de tanıdığımız sevindirici durumlarda, Kusursuz Model Senaryosu –ya da KMS– içindeyiz demektir. Parametre değerlerini kesin bir biçimde bildiğimiz KMS'nin güçlü versiyonu ile yalnızca matematiksel biçimleri bildiğimiz ve parametre değerlerini gözlemler yoluyla

tahmin etmemiz gereken zayıf versiyonu birbirinden ayırmamız yararlıdır. KMS'nin bu iki versiyonundan birinde olduğumuz sürece gürültü X ve S arasındaki mesafe yoluyla tanımlanır ve durumdaki belirsizliğe neden olan gürültüden söz etmek mantıklıdır, zira gerçek değerini bilmesek de bir Gerçek durumun var olduğunu biliriz. KMS'den ayrıldığımızda bu tablodan geriye pek bir şey kalmaz. KMS içindeyken bile, dünyanın doğrusal olmadığını kabul ettiğimiz anda, gürültü yepyeni bir önem kazanır.

Peki, determinist ve raslantısal, ya da belki periyodik kavramlar? Bunlar modellerimizin niteliklerine göndermede bulunur; onları gerçek dünyada yalnızca (günün) en iyi modeli yoluyla uygulayabiliriz. Gerçekten de raslantısal fiziksel dinamik dizgeler var mıdır? Yazı tura atma ve zar atma gibi sıradan "raslantısallık" kaynaklarına karşın, klasik fiziksel tipik yanıt "hayır"dır; hayır, raslantısallık diye bir şey yoktur. Eksiksiz bir dizi yasayla yazı turanın, atılan zarların ya da rulet tekerinin dönüşünün sonucunu hesaplamamız çok zor olabilir (ya da mümkün olmayabilir): ama bu yalnızca uygulamada bir sorundur, prensipte değil. Laplace'ın şeytanı bu türden kestirimlerde hiç zorluk çekmezdi. Ama kuantum mekaniği farklıdır. Geleneksel kuantum mekanik kuramı dâhilinde, bir uranyum atomunun yarı yaşamı uranyum atomunun kütlesi kadar doğal ve gerçek bir niceliktir. Klasik yazı turaların ya da ruletin raslantısal olarak en iyi modeller olmaması gerçeği kuantum mekaniğinin raslantısallık ve nesnel olabilirlik savı karşısında konu dışıdır. Nesnel olabilirliklerin varlığı lehindeki –ya da karşısındaki– savlar fiziksel dizgelerin bizim bu dizgeler için mevcut modellerimiz açısından yorumlanmasını

gerektirir. Her zaman olduğu gibi. Gelecekte bir kuram bu raslantısallığı determinizm lehine hükümsüz kılabilir ama bizler gitgide kısalan küçük bir antrakt pahasına sahnedeyiz. En iyi gerçeklik modellerimizden bazılarının sizler bu sözcükleri okurken hâlâ raslantısal unsurları içine alacağını söylemek oldukça güvenilirdir.

Gözlemler ve gürültü

Son birkaç onyılda determinist dizgeleri düzensiz dizgelerden ayıran bir zaman serisi kullanmaya dair çok sayıda bilimsel makale yazıldı. Bu çığırı başlatan fizik literatürü oldu; ardından jeofizik, iktisat, tıp, toplumbilim ve ötesine yayıldı. Bu yazıların birçoğu Hollandalı matematikçi Floris Takens'in 1983'te kanıtladığı güzel teoremden esinlenmişti; bu teoreme VIII. Bölüm'de döneceğiz. Matematiksel bir dizgenin determinist mi yoksa düzensiz mi olduğunu belirlemek için basit bir kuralımız olduğuna göre, bütün bu makaleler neden yazıldı? Neden kolayca dizgenin kurallarına göz atıp raslantısal bir sayı üreteci gerektirip gerektirmediğine bakmıyoruz? Matematikçilerin oynadıkları oyunları doğa (ve diğer) bilimcilerin çalışmalarına getirilen kısıtlamalarla karıştırmak çok yaygındır.

Gerçek matematikçiler zekâ oyunları oynamaktan zevk alır – örneğin, kuralları unutmuş gibi yapıp sonra da yalnızca dizgenin durumlarının zaman serilerine bakarak dizgenin determinist mi yoksa düzensiz mi olduğunu tahmin etmek gibi. Zaman serisi bilinen herhangi bir determinist dizgeyi sonsuz değerde uzak geçmiş ile sonsuz değer-

de uzak gelecekte net biçimde tanımlayabilirler mi? Basit noktalar ve hatta periyodik döngüler için bu oyun yeterince zor değil; onu daha ilginç kılmak için kesin durumları bilmediğimiz, yalnızca her bir X durumunun gürültü yüklü gözlemlerine eriştiğimiz bir çeşitleme düşünelim. Köken S –bir parça yanlış yönlendirici olsa da– yaygın olarak her bir gerçek X'e raslantısal bir sayı eklemekle bağlantılıdır. Bu durumda, bu *gözlemsel gürültü* dizgenin gelecek durumlarını değil, yalnızca her bir duruma ilişkin gözlemlerimizi etkiler; bu, düzensiz dizgelerde –örneğin, X'in gelecekteki değerini değiştirdiği için gelecek üzerinde etkiye sahip R değerinin bulunduğu Yule Denklemi'nde– raslantısal R sayılarının oynadıkları rolden çok farklıdır. Bu farkı vurgulamak için X'i gerçekten de etkileyen raslantısal etkilere *dinamik gürültü* denir.

Yukarıda belirtildiği gibi, matematikçiler Kusursuz Model Senaryosu (KMS) dâhilinde çalışabilir. Matematikçiler zaman serisini üreten modelin belirli türden bir yapıya sahip olduğunu bilerek işe başlar ve bazen yapıyı (zayıf KMS) ve hatta bazen de parametrelerin değerlerini (güçlü KMS) bildiklerini varsayarlar. Ardından X'in değerlerini unutmuş gibi davranıp bu değerlerin ne olduğunu bulup bulamayacaklarına bakarlar; ya da matematiksel dizgeyi unutmuş gibi yapıp ellerinde yalnızca S varken parametre değerlerinin yanı sıra dizgeyi tanımlayıp tanımlayamayacaklarına ya da dizgenin kaotik olup olmadığına karar verip veremeyeceklerine veya X'in gelecek değerini tahmin edip edemeyeceklerine bakarlar.

Bu noktada oyunlarının nereye varacağını görmek çok kolay olacaktır: matematikçilerimiz doğa bilimcilerinin

asla kurtulamadıkları durumu benzetimle canlandırmaya çalışmaktadır. Fizikçiler, doğa bilimciler, iktisatçılar ve diğer bilim insanları bilimsel çalışmanın fiziksel dizgelerine uygun yasayı –Doğa Yasalarını– *bilmez*. Ve bilimsel gözlemler de kusursuz değildir; gözlemsel gürültü sayesinde kaçınılmaz bir biçimde belirsiz olabilirler, ama zaten öykü burada sona ermiyor. Gerçek gözlemleri matematiksel oyunların gözlemleriyle karıştırmak büyük bir hatadır.

Doğa bilimci farklı bir oyun oynamaya zorlanmaktadır. Aynı sorulara yanıt vermeye çabalarken bilim insanına yalnızca gözlemler zaman serisi, S, gözlemsel gürültü istatistikleri ile ilgili birtakım bilgiler ve bir tür matematiksel denklemin var olduğu *umudu* verilmektedir. Fizikçiler böyle bir yapının gerçekten de var olup olmadığından asla emin olamaz: model durum değişkeni X'in gerçekten de fiziksel bir anlamı olup olmadığından bile emin olamaz. Eğer X gerçek bir bahçedeki tavşanların sayısıysa, X'in var olmadığını hayal etmek zor, ne de olsa sıradan bir tamsayı. Peki ya rüzgârın gücü ya da sıcaklık derecesi gibi model değişkenleri? Durum yöneyimizin bu bileşenlerine denk düşen gerçek sayılar var mı? Ve eğer yoksa, tavşanlar ile rüzgârın gücü arasındaki uyuşma nerede bozuluyor?

Felsefecimiz böyle sorularla çok ilgilidir – aslında hepimiz ilgilenmeliyiz. Fitzroy'la çalışarak ilk hava uyarı sistemini oluşturan Fransız Le Verrier öldüğünde, iki gezegen keşfetmekle ün salmıştı. Uranüs'ün yörüngesindeki gözlenmiş zaman serilerindeki "düzensizlikler"den yola çıkarak ve Newton yasalarını kullanarak Neptün'ün olması gereken yeri tahmin etti ve ardından bu gezegen gözlendi. Ayrıca, Merkür gezegeninin yörüngesindeki

"düzensizlikler"i analiz ederek gözlemcilere bir diğer gezegeni nerede bulabileceklerini söyledi. Onlar da gezegeni buldu: yeni gezegen –Vulcan– Güneş'e çok yakındı ve görülmesi çok zordu; ama onyıllar boyunca gözlendi. Bugün Vulcan diye bir gezegenin var olmadığını biliyoruz; Le Verrier yanıldı çünkü Newton yasaları Merkür'ün yörüngesini betimlemekte yetersizdir (oysa, Einstein'ın yasaları çok daha iyi betimler). Temel neden aslında model yetersizliği olduğunda modellerimiz ile verilerimiz arasındaki uyumsuzluktan gürültüyü ne kadar sıklıkla sorumlu tutuyoruz? Gerçekten, ilgiye şayan bilimin büyük bölümü tam da sınırda gerçekleşir – bilim insanları bunun farkına varsın ya da varmasın. Bugünün yasalarının geçerli olup olmadığından asla emin değiliz. Günümüz iklim bilimi zor işlerin anlayışımızın tam da sınırında gerçekleştirilmesinin iyi bir örneği.

Kaos çalışmaları iki farklı konunun birbirinden ayrılmasının önemini açıklığa kavuşturdu: birincisi, durumda ya da parametrelerde belirsizliğin etkileri; ikincisi, matematiğimizin yetersizliği. KMS ile çalışan matematikçiler KMS ile çalışmazmış gibi yaptıklarında ilerleme kaydederken KMS ile çalışmazken KMS ile çalışıyormuş gibi yapan –ya da buna inanan– bilim insanları büyük hasara neden olabilir – özellikle de saflık edip modellerini karar vermede temel olarak alırlarsa. Gerçek şu ki, matematiksel kanıtın standartlarını fiziksel dizgelere uygulayamayız; yalnızca fiziksel dizgelerin matematiksel modellerine uygulayabiliriz. Fiziksel bir dizgenin kaotik olduğunu ya da onun periyodik olduğunu kanıtlamak olanaksızdır. Fizikçi ve matematikçi oldukça farklı şeyleri anlatırken bazen aynı sözcükleri kul-

landıklarını unutmamalı; bunu yaptıklarında da genellikle birtakım zorluklarla ve büyük oranda terslikle karşılaşmaktalar. Mach'ın yukarıda yer alan yorumu bunun yeni bir konu olmadığını gösteriyor.

IV. Bölüm

MATEMATİKSEL MODELLERDE KAOS

Doğrusal olmayan basit dizgelerin basit dinamik niteliklere sahip olması gerekmediğini daha fazla insan kavradıkça şimdikinden daha iyi bir konumda oluruz.

Lord May (1976)

Bu bölüm hayvanbilimden astronomiye kaotik matematiksel modellerin çok kısa bir incelemesinden oluşuyor. Her tür kültürel istila gibi, duyarlı bağımlılık taşıyan, doğrusal olmayan determinist modellerin gelişi de bazen benimsendi, bazen benimsenmedi. Neredeyse tamamen kabul edildiği alan fizik oldu; fizikte, göreceğimiz gibi, bu modellerin kestirimlerinin deneysel doğrulaması hep şaşkınlığa neden oldu. Nüfus biyolojisi de dâhil olmak üzere diğer alanlarda kaosun uygulanabilirliği hâlâ sorgulanmaktadır. Ama astronomlarla meteorologların modelleri sahneye çıkmadan on yıl kadar önce ilk kaos modellerinin bazılarını önerenler nüfus biyologlarıydı. Bu alana dönük ilgiyi yeniden canlandıran, 1976'da *Nature* dergisinde ya-

yımlanan etkili ve herkesçe okunabilen bir makale oldu. Bu makalede belirtilen temel bilgilerle başlıyoruz.

Mayıs ayının sevgili böcekleri*

1976'da, Lord May, *Nature* dergisinde doğrusal olmayan determinist dizgelerin temel özelliklerini inceleyen etkileyici bir yazı yayımladı. Birçok ilginç sorunun yanıtsız kaldığına dikkatleri çekerek bu yeni perspektifin hem kuramsal, hem de uygulanabilir ve eğitbilimsel değer taşıdığını ileri sürdü ve bu perspektifin dizgeleri betimlemek için yeni metaforlar yoluyla gözlenecek yeni niceliklere ve tahmin edilecek yeni parametrelere kadar her şeyi önerdiğini dile getirdi. En basit nüfus dinamiklerinden bazıları, bir nüfusun bir sonrakiyle üst üste binmediği, üreyen nüfus dinamikleridir. Örneğin, bir yılda bir nesilden üreyen böcekler ayrı zaman denklemleriyle betimlenebilir. Bu durumda, X_i, nüfusu ya da nüfus yoğunluğunu i'inci yıl içinde temsil edecektir; zaman serimiz yıl başına tek bir değere sahip olup denklem de bu yılınkine bağlı olarak gelecek yılın nüfusunun boyutunu belirleyen kuraldır. α biçiminde bir parametre kaynakların yoğunluğunu belirler. 1950'lerde, Moran ve Ricker –birbirlerinden bağımsız olarak– Şekil 8(f)'de yer alan denklemi önerdi. Bu grafiğe baktığımızda, X'in şimdiki değeri küçük olduğunda X'in gelecek değerinin daha

* Shakespeare'in 18. sonesindeki "darling buds of May" – Mayıs ayının sevgili tomurcukları" yerine "darling bugs of May" tümcesi kullanılarak yapılan bir sözcük oyunu. (ç.n.)

büyük olduğunu görebiliriz: küçük nüfuslar büyür. Ama X çok fazla büyürse, o zaman da X'in gelecek değeri küçüktür; mevcut değer çok büyük olduğunda da gelecek değer çok küçüktür: büyük nüfuslar her bir birey için mevcut kaynakları tüketir ve böylece başarılı üreme oranı düşer.

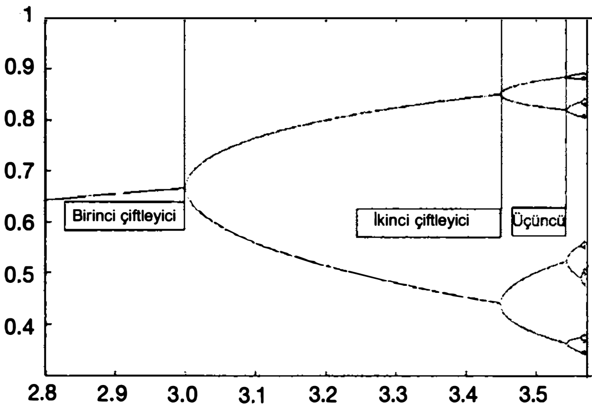
Düzensiz bir biçimde dalgalanan nüfuslar uzunca bir süredir gözlenmekte ve araştırmacılar da uzun bir süredir bunların kökenini tartışmakta. Kanada vaşaklarının ve hem İskandinavya hem de Japon tarla farelerinin zaman serileri –Güneş lekeleri serileriyle birlikte– istatistik alanında en çok tartışılan veri setleri arasında yer almakta. Doğrusal olmayan çok basit modellerin bu tür düzensiz dalgalanmaları ortaya koyabileceği düşüncesi gerçek nüfus dalgalanmaları açısından yepyeni bir potansiyel mekanizmayı akla getirdi – "doğal" nüfusların ya istikrarlı bir düzeye ya da düzenli bir periyodik döngüye girmeleri düşüncesiyle çelişen bir mekanizma. Bu raslantısal *görünen* dalgalanmalara aslında hava gibi bir dış gücün neden olmasına gerek olmadığı, bu tür dalgalanmaların doğal nüfus dinamiklerinin ayrılmaz bir parçası olabileceği görüşü nüfusu anlama ve nüfusla başa çıkma çabalarını kökten değiştirme potansiyeline sahipti. "Bir nüfusun biyolojik ve fiziksel çevreyle etkileşimlerinin yerine pasif parametreler yerleştirmek gerçekliğe büyük zarar verebilir" uyarısında bulunan May, Lojistik Denklem'de ilginç davranışların da araştırılmasını sağladı. Makale, "öğrencilerin sezileri doğrusal olmayan basit eşitliklerin yapabileceği vahşice şeyleri görerek zenginleşsin diye, bu farklı eşitlikleri temel matematik derslerine dâhil etme yönünde ısrarlı bir rica" ile sona erer. Bu otuz yıl önceydi.

Bu vahşice şeylerin bazılarını aşağıda ele alacağız; ama, unutmayın, matematikçilerin Lojistik Denklem'e odaklanması bu denklemin çeşitli fiziksel ve biyolojik dizgeleri "yönetmekte" olduğu imasında bulunmak için kullanılmaz. Doğrusal olmayan dinamiği geleneksel analizden ayıran bir nokta, doğrusal olmayan dinamiğin belirli parametre değerlerine sahip özel eşitliklerde –herhangi bir başlangıç durumunun ayrıntılarından ziyade– dizgelerin davranışlarına daha fazla odaklanmasıdır: odak, istatistikten ziyade geometri üzerindedir. Benzer dinamikler "iyi" istatistiklerden çok daha önemli olabilir. Ve de Lojistik Denklem ile Moran-Ricker Denklemi'nin bu açıdan çok benzer oldukları ortaya çıkar – Şekil 8(f)'de çok farklı görünseler de. Elbette, ayrıntılar çok değerli olabilir; Lojistik Model'in kalıcı rolü eğitbilimsel nitelikli olabilir: karmaşık dinamiğin ya çok karmaşık modellere ya da raslantısallığa gereksinim duyduğu biçimindeki tarihsel inancı kovmaya yardım edebilir.

Evrensellik: kaosa giden yolları tahmin etmek

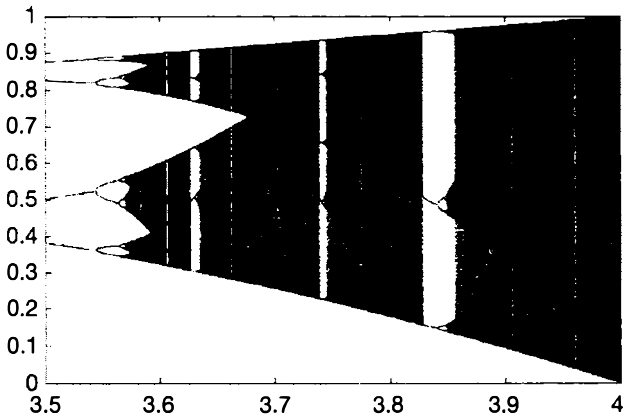
Lojistik Denklem inanılmaz çeşitlilikte davranışların ortaya çıkmasını sağlar. Şekil 11'deki ünlü çatallanma çizeneği denklemin davranışını parametresinin çok farklı değerlerinde tek bir şekilde özetler. Dikey eksen α'dır ve yatay eksendeki noktalarda α'nın herhangi bir değeri için çekicinin yakınına denk düşen durumları gösterir. Burada α dizgenin parametresini yansıtır: eğer X göldeki balıkların

sayısıysa, o zaman, α da göldeki yem miktarıdır; eğer X musluktan düşen damlalar arasındaki süreyse, o zaman, α da musluktan sızan suyun miktarıdır; eğer X sıvı ısıyayımında silindirlerin devinimiyse, o zaman, α da cihazın tabanına uygulanan ısıdır. Çok farklı şeylerin modellerinde davranış aynıdır. Küçük α için (solda) sabitlenmiş bir nokta çekicimiz var. Sabitlenmiş noktanın konumu α arttıkça artar, ta ki α bir değerine ulaşana dek; orada sabitlenmiş nokta ortadan kaybolur ve iki nokta arasında oynayan yinelenmeler görürüz: bir adet nokta iki döngüsü. α artmaya devam ettikçe karşımıza nokta dört döngüsü çıkar, sonra sekiz, on altı, sonra da otuz iki. Ve bu böyle devam eder. Tekrar tekrar çatallanma söz konusudur.



Şekil 11. α 2.8'den -3.5'e artarken Lojistik Denklem'de periyod çiftleyici davranış; ilk üç çiftleyici belirtildi.

Döngü periyodu daima iki çarpan değerinde büyüdüğü için bunlara *periyod çiftleyici çatallanmalar* (period doubling bifurcations) denir. Eski döngüler artık görülmezken, bunlar gitgide azalıp ortadan kaybolmaz. Hâlâ orada olsalar da istikrarsız hale gelmişlerdir. α bir sayısından büyük olduğunda Lojistik Denklem'in kökenine olan da budur: X eğer kesinlikle sıfıra eşitse yalnızca sıfırda kalır; oysa sıfır olmayan küçük değerler her bir yinelenmede büyür. Benzer biçimde, istikrarsız bir periyodik döngüye yakın noktalar ondan uzaklaşır ve bu nedenle de biz denklemi yinelerken onları artık net olarak görmeyiz.



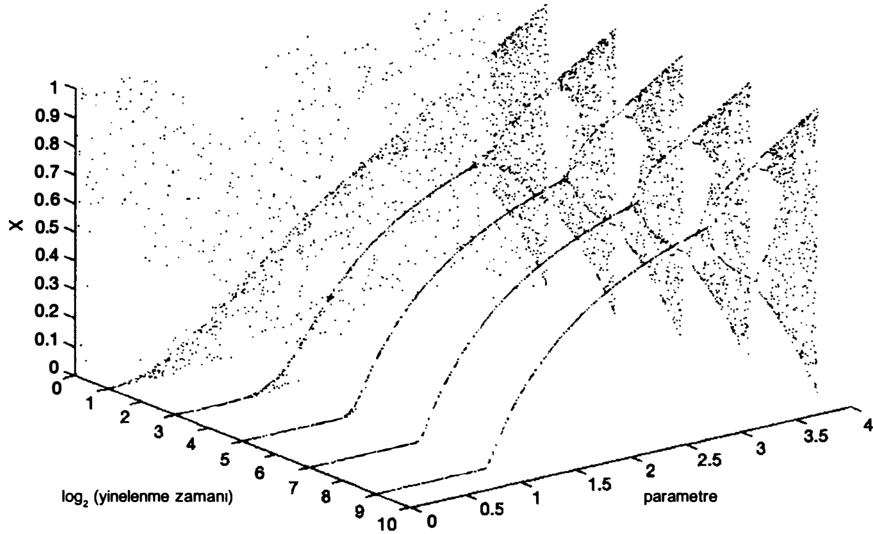
12. α, α = 3.5 değerinde dört döngülük bir periyottan α = 4'te kaosa doğru artış gösterirken Lojistik Denklem'de çeşitli davranışlar. Her bir periyodik pencerenin sağ yanında kopyalanmış periyod çiftleyen basamaklara dikkat edin.

Şekil 11'de gizli bir düzenlilik söz konusu. Periyodun katlandığı bir noktada α'nın birbirini izleyen herhangi üç değerini alın, birinciyi ikinciden çıkarın ve sonra da bu sayıyı ikinci ile üçüncü arasındaki farka bölün. Sonuçta Feigenbaum sayısı ortaya çıkar: -4.6692016091. Mitch Feigenbaum, bu ilişkileri, bir cep hesap makinesi kullanarak, 1970'lerin sonlarında Los Alamos'ta keşfetti ve bu oran da onun adıyla anılmaktadır. Başkaları da ondan bağımsız olarak bu sayıyı buldu: bu hesaplamayı yapma içgörüsüne sahip olmak bile her bir durum için hayret verici bir şey.

Feigenbaum sayısı birden büyük olduğu için çatallanmaların oluştuğu α değerleri gitgide birbirine yaklaşır ve α'nın yaklaşık 3.5699456718 değerine ulaşmadan önce sonsuz sayıda çatallanma elde ederiz. Şekil 12, α'nın daha büyük değerleri söz konusu olduğunda neler olduğunu göstermekte. Bu noktalar denizi büyük ölçüde kaotik. Ama periyodik davranış pencerelerine dikkat edin: örneğin, nokta üç penceresinde α bir artı sekizin karekökü değerini alır (yani, yaklaşık 3.828). Bu, istikrarlı bir nokta üç döngüsüdür. Nokta beşe denk düşen pencereyi belirleyebilir misiniz? Ya da yediye?

Şekil 13'te Lojistik Denklem sayıları bir bağlama oturtulmaktadır. α ve X_0 için raslantısal seçilmiş değerler bu üç boyutlu şeklin t eşittir sıfır kesitinde bir nokta bulutu oluşturmakta. Lojistik Denklem'i bu noktalardan ileride yinelenen geçiciler gitgide ufalıp kaybolur ve α'nın her bir değerindeki çekiciler yavaş yavaş gözler önüne serilir; 512 yinelenme sonrasında da son kesit Şekil 12'yi andırır.

Lojistik Denklem gibi basit bir şeyin bize sıvı helyumun davranışı hakkında bir şeyler anlatmasını beklemek çok



13. X_0'ın ilk başta raslantısal değerlerinin düşüşünü ve yinelenme sayısı arttıkça kutunun sol arka tarafındaki α'nın kendi münferit çekicilerine doğru düşmesini gösteren üç boyutlu çizenek. Sağ ön bölümdeki noktaların Şekil 11 ve 12'dekilerle benzerliğine dikkat edin.

şey istemek olur. Ama o yine de anlatır. Karmaşık davranışın başlangıcı periyod çiftleyicinin nitel işaretlerini göstermekle kalmaz, Feigenbaum sayılarının birçok deneyde hesaplanmış gerçek nicel değerleri de Lojistik Denklem'de hesaplananlarla kusursuz biçimde örtüşür. Birçok fiziksel dizge bu "kaosa giden periyod çiftleyici yol"u görünür kılar gibidir: hidrodinamik (su, cıva, sıvı helyum), lazerler, elektronikler (diyotlar, transistorlar) ve kimyasal reaksiyonlar (BZ reaksiyonu). Deneylerde Feigenbaum sayısı genellikle iki haneli bir kesinlikle tahmin edilebilir. Bu durum, kaosun anlatıldığı elinizdeki kitapta dile getirilen en sersemletici sonuçlardan biridir: nasıl olur da Lojistik Denklem'le yapılmış basit hesaplamalar bütün bu fiziksel dizgeler için geçerli olan bilgiyi bize verebilir?

Matematikçinin bu çizenek karşısındaki hayranlığı hem çizeneğin güzelliğinden hem de ilk bakışta Lojistik Denklem'den oldukça farklı gibi görünen Moran-Ricker Denklemi'nden ve daha birçok dizgeden benzer bir tablo alıyor olmamız gerçeğinden kaynaklanır. Teknik bir inceleme, periyod çiftleyici olgusunun yumrunun bir parabol *gibi göründüğü* "tek yumrulu" denklemlerde ortak olduğunu göstermekte. Çok gerçek ve uygun bir ifadeyle, doğrusal olmayan denklemlerin neredeyse tamamı maksimum değere bu kadar yakın görünür ve bu nedenle de periyod çiftleyici gibi parametrelere "evrensel" adı verilir – *bütün* denklemlerde bulunmasalar bile. Bu matematiksel gerçeklerden daha etkileyici olanı ise çok çeşitli fiziksel dizgenin –görebildiğimiz kadarıyla– bu matematiksel yapıyı yansıtan beklenmedik bir davranış sergilediği biçimindeki görgül gerçektir. O zaman, bu, matematiğin Doğa'yı yal-

nızca betimlemekle kalmayıp aynı zamanda yönettiği savı için güçlü bir kanıt olmuyor mu? Bu soruya yanıt verebilmek için Feigenbaum sayısının π gibi bir geometri sabitine mi yoksa ışığın hızı, yani c gibi bir fizik sabitine mi daha yakın olduğunu değerlendirmemiz gerekir. Disklerin, teneke kutuların ve topların geometrisi π kullanılarak çok iyi betimlenmektedir, ama fiziksel sabitlerin doğa yasalarımız içindeki varlıkların doğasını yönetmesi karşısında π gerçek uzunluklar, alan ve hacim arasındaki ilişkileri pek yönetemez.

Matematiksel "kaos" teriminin kökeni

1964'te, Rus matematikçi A. N. Sharkovski birçok "tek yumrulu" denklemin davranışları hakkında hayranlık uyandırıcı bir teoremi kanıtladı: periyodik bir döngünün keşfedilmesi diğerlerinin de –potansiyel olarak birçok başkasının da– var olduğunu gösterir. Parametrenin belirli bir değeri için bir nokta 16 döngüsünün var olduğunun keşfedilmesi, bu değerde nokta sekiz, dört, iki ve bir döngülerinin de olduğu anlamını taşımaktaydı; nokta üç döngüsünün bulunması ise olası her noktanın döngüsü olduğu anlamına geliyordu! Bu, yine, yapıcı olmayan bir kanıt; döngülerin nerelerde olduğunu bize söylemiyor, ama yine de çok düzgün bir sonuç. Sharkovski'den on bir yıl sonra, Li ve Yorke, "Period Three Implies Chaos" gibi son derece etkileyici bir başlıkla çok büyük etki yaratan makalelerini yayımladı. "Kaos" adı belleklere kazındı.

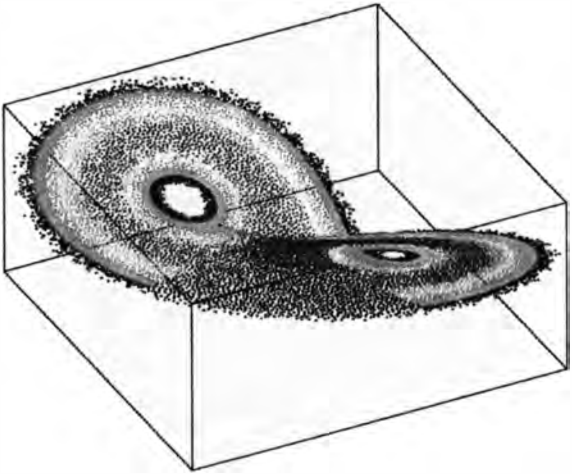
Daha yüksek boyutlu matematiksel dizgeler

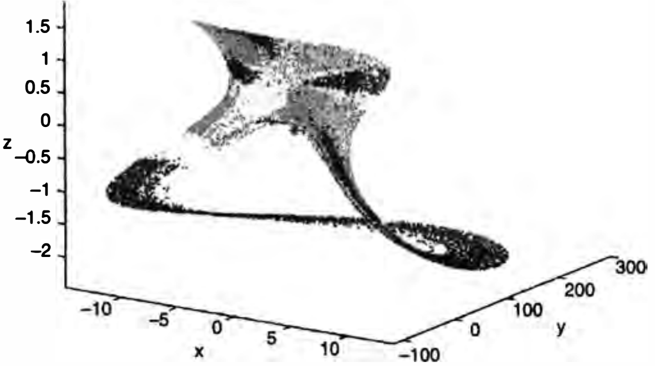
Şimdiye kadarki model durumlarımızın birçoğu yalnızca bir bileşenden oluşuyordu. Tarla faresi ve gelincik modeli bir istisna, çünkü bu durum iki sayıdan oluşmaktaydı: tarla farelerinin nüfusunu yansıtan bir sayı ile gelinciklerin nüfusunu yansıtan bir sayı. Bu örnekte, durum bir yöney. Matematikçiler durumdaki bileşenlerin sayısını dizgenin *boyutu* olarak adlandırır, zira durum yöneylerini çıkarmak bu boyutun bir durum uzamını gerektirecektir.

Daha yüksek boyutlara ilerlediğimizde dizgeler genellikle denklem değil, *akış* (flow) olmaktadır: denklem, X'in bir değerini alıp X'in bir sonraki değerini veren bir işlevken, akış, durum uzamında herhangi bir nokta için X'in ivintisini sağlar. Deniz dibinde salınan bir karakavza düşünün; akıntı tarafından taşınır ve denizin akışını izler. Karakavzanın deniz içinde izlediği üç boyutlu yol X'in durum uzamında izlediği yola benzer ve her ikisine de bazen *yörünge* denir. Eğer karakavza yerine son derece akışkan bir parçanın izlediği yolu izlersek, genellikle bu yolların duyarlı bağımlılık ile yinelendiğini buluruz. Denklemler deterministtir ve bu akışkan parçaların da "Lagrange kaosu" sergilediği söylenir. Sıvılarla yapılan laboratuvar deneyleri genellikle bizim sıvı akış modellerimizde gözlenen kaotik dinamiği yansıtan güzel kalıplar ortaya koyar. Bu ivinti alanlarını tanımlayan diferansiyel denklemleri incelemeden önce çeşitli kaotik dizgeleri kısaca inceleyeceğiz.

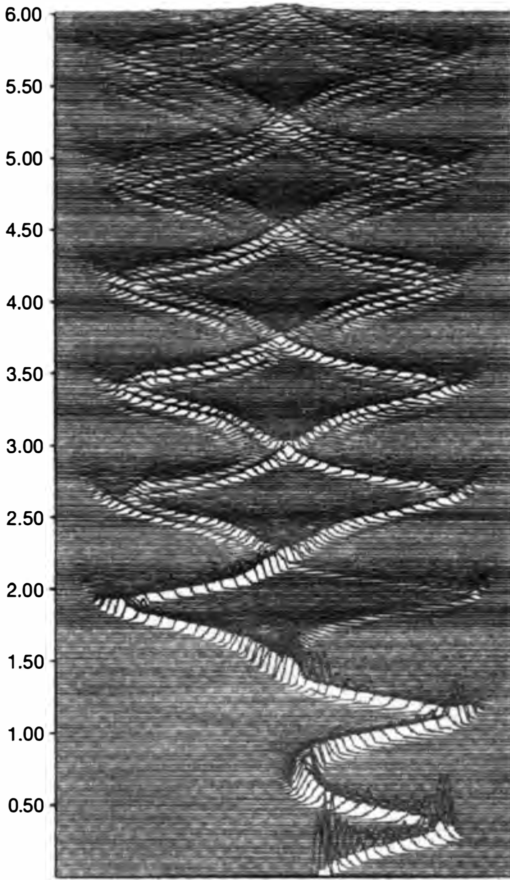
1963'te, Ed Lorenz, kaotik dizgelerin tahmin edilebilirliği hakkında klasik bir eser haline gelecek makalesini yayımladı. Bugün *Lorenz Dizgesi* denen, ısıyayma başlangıcının yakınındaki bir sıvının dinamiğine dayanan, üç denklemli, büyük ölçüde basitleştirilmiş bir set tasarladı. Durumun üç bileşeni, altta olanı ısıtılan iki düz tabla arasındaki bir sıvı tabakasında ısıyı ileten rulolar olarak düşünülebilir. Herhangi bir ısıyayma olmadığında sıvı hareketsizdir ve sıvıdaki sıcaklık derecesi düzenli bir biçimde alttaki daha sıcak tabladan tepedekine doğru azalır. Lorenz modelinin durumları üç değerden oluşuyordu: {x, y, z}; burada x dönen sıvının hızını yansıtıyor, y yükselen ve alçalan sıvının ısısındaki farklılıkları nitelendiriyor, z de doğrusal sıcaklık derecesi profilindeki sapmayı ölçüyordu. Bu dizgeden bir çekici Şekil 14'te gösterilmekte; şans eseri, tam da bir kelebeğe benziyor. Çekici üzerindeki gölgelendirme, son derece küçük bir belirsizliğin katlanması için geçen zamandaki değişiklikleri yansıtır. Bu gölgelerin anlamlarını tartışmaya VI. Bölüm'de döneceğiz – şimdilik konuma bağlı değişikliklere dikkat edin.

Lorenz dizgesinde belirsizliğin gelişmesi Şekil 15'te gösterilmektedir; bu, Şekil 10'daki Yule Denklemi'ne ilişkin şekilden biraz daha karmaşık. Şekil 15'te 21. yüzyıl şeytanımızın bu dizge için yapabileceği türden bir tahmin gösteriliyor: panelin alt bölümündeki, ilk başlarda çok küçük olan belirsizlik önce genişler, sonra daralır, sonra genişler, sonra daralır (...) ve en sonunda iki parçaya ayrılıp solmaya başlar. Ama, vermeye çalıştığımız kararlara bağlı ola-





14. Lorenz çekicisinin ve (altta) Moore-Spiegel çekicisinin üç boyutlu yapıları. Gölgelenme her bir noktada katlanan belirsizlikteki değişiklikleri gösterir.



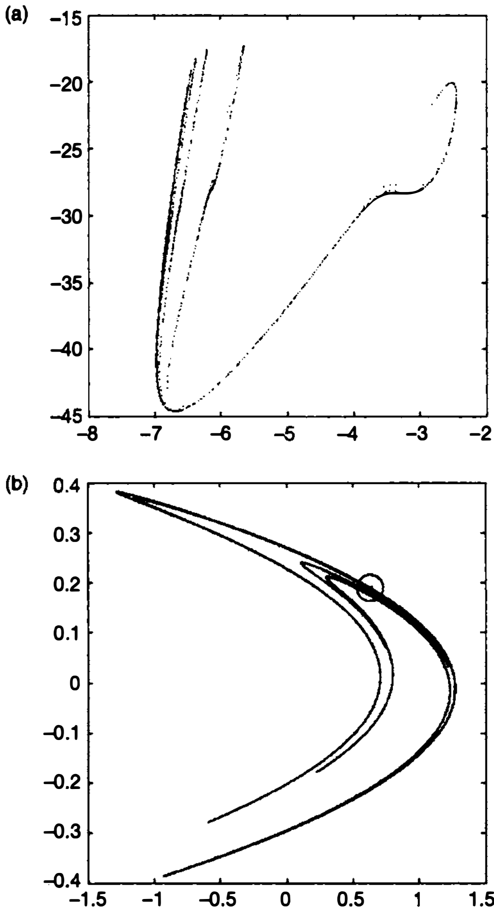
15. 21. yüzyıl şeytanımızın 1963 tarihli Lorenz Dizgesi için yapacağı olabilirlik tahmini. Bu kaotik dizgede belirsizliğin ilerleyiş biçimini Şekil 10'da gösterilen Yule Denklemi'ndeki belirsizliğin nispeten daha basit ilerleyişiyle karşılaştırın.

rak, panelin tepesinde yansıtıldığı zaman bile bu örüntüde yararlı bilgiler bulunabilir. Bu örnekte, belirsizlik grafiğin tepesine eriştiğinde dengelenmemiştir.

1965'te, matematik astronomları Moore ve Spiegel, bir yıldızın atmosferindeki bir gaz parçasının basit bir modelini ele aldı. Durum uzamı yine üç boyutludur ve X'in üç bileşeni de yükseklik, ivinti, parçanın hızlanmasıdır. Dinamikler ilginç, çünkü birbiriyle çekişen iki güç var elimizde: parçanın dengesini bozmaya eğilim gösteren termal bir güç ile parçayı aynen bir yay gibi başlangıç noktasına götürme eğilimi gösteren bir güç. Parça yükseldikçe, kendisini, etrafını çevreleyen akışkandan farklı bir sıcaklık derecesinde bulur ve bu da ivinti ve beden sıcaklığına katkı sağlar; ama, aynı zamanda, yıldızın manyetik alanı parçayı özgün konumuna geri çekmek için bir yay gibi işlev görür. Bu iki rakip gücün neden olduğu devinim çoğu zaman kaosa yol açar. Moore-Spiegel çekicisi Şekil 16'da da gösterilmekte.

Kaos deneyleri her zaman bilgisayarların sınırlarını zorlamıştır – bazen de sınırlarının ötesinde zorlamıştır. 1970'lerde, astronom Michel Hénon, kaotik çekicilerin ayrıntılı bir araştırmasını yapmak istedi. Verili bir bilgisayar gücü karşılığında, dizgenin karmaşıklığı ile insanın hesaplamayı göze alabileceği zaman serisi süresi arasında bir takas söz konusu. Hénon, Lorenz'in 1963'teki dizgesine benzeyip kendi bilgisayarında yinelemesi daha ucuz bir dizgenin peşindeydi. Bu, durum X'in değer çifti {x, y}'den oluştuğu iki boyutlu bir dizgeydi. Hénon Denklemi şu kurallarla tanımlanır:

x'in yeni değeri (...) bir eksi y, artı α kere x_i^2'ye eşittir; y_{i+1}'in yeni değeri β kere x_i'ye eşittir.



16. (a) Moore-Spiegel çekicisinin $z = 0$'da bir kesiti ile (b) α'nın 1.4 ve β'nın da 0.3 olduğu Hénon çekicisinin çizimleri. Her iki durumda da çoklu yapının benzerliklerine dikkat edin.

Şekil 16'da, panel (b), α'nın 1.4 ve β'nın da 0.3 olduğu çekiciyi göstermekte; panel (a), z'nin sıfır ve büyümekte olduğu durumlarda dizgenin anlık görüntüleri birleştirilerek gerçekleştirilen Moore-Spiegel çekicisinin bir kesitini göstermekte. Bu tür şekillere *Poincaré kesiti* denmektedir ve bunlar bir akışın kesitlerinin denklemlere ne kadar benzediğini örnekler.

Gecikme denklemleri, salgınlar ve tıbbi teşhisler

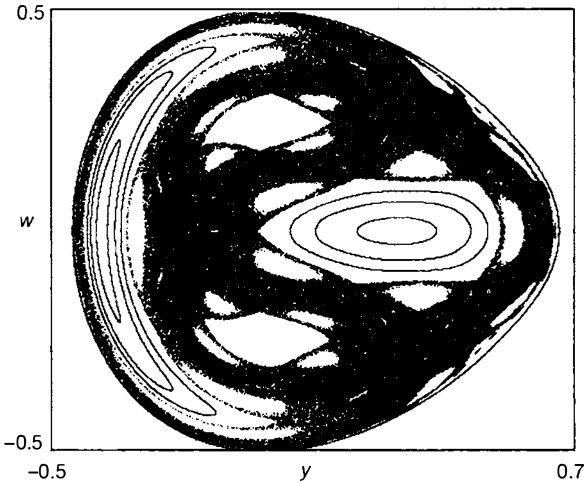
Bir diğer ilginç model ailesi de gecikme denklemleridir. Burada hem mevcut durum hem de geçmiş bir durum ("geciktirilmiş durum") dinamikte dolaysız bir rol oynar. Bu modeller biyolojik dizgelerde yaygındır ve lösemi gibi salınımlı hastalıklar hakkında fikir verebilir. Kan temin ederken yarın ne kadar hücre olacağı, bugün mevcut hücre sayısına ve bugün olgunlaşan hücre sayısına bağlıdır; gecikme, bu yeni hücrelerin talep edildiği zaman ile yeni hücrelerin olgunlaştığı zaman arasındaki boşluktur: bugün olgunlaşan hücrelerin sayısı geçmişte bir noktadaki kan hücrelerinin sayısına bağlıdır. Bu tür bir salınım dinamiği taşıyan birçok hastalık vardır ve gecikme denklemlerinde kaosun incelenmesi çok ilginç ve üretkendir.

Matematiksel modellerin ele alınmasını bir paragraf sonraya bırakıp tıbbi araştırmanın matematiksel modellerimizden elde edilen bilgilerin gerçek dizgelerde kullanıldığı bir diğer alan olduğunu belirtelim. Gecikme denklemleri konusunda Mike Mackey'nin McGill Üniversitesi'nde

yaptığı araştırma ile diğer bazı araştırmalar, birey değil de nüfus bağlamında salınım yapan hastalıkların evrimi konusunda fikir sağladı: modellerimiz, dinamiğin zaman ve uzam içinde ele alınabileceği kızamık araştırmalarındaki gerçeklikle karşılaştırılabilir. Kaotik zaman serilerinin incelenmesi, ayrıca, beyinden (EEG) ve kalpten (EKG) alınanlar da dâhil, karmaşık tıbbi zaman serilerinin görülmesi için önemli yordamların geliştirilmesine önayak oldu. Bu, gerçek dünyadaki bu tıbbi olguların kaotik oldukları, hatta en iyi kaotik modellerle tanımlandıkları anlamına gelmez; kaos için geliştirilmiş analiz modelleri, analiz edilen sinyalleri üreten gerçek dizgelerin temelinde yatan dinamiğin doğası ne olursa olsun, değer taşıyabilir.

Hamilton kaosu

Eğer durum uzamındaki hacimler zaman içinde daralma göstermezse, ortada bir çekici olamaz. 1964'te, Hénon ve Heiles, bir galaksi içindeki bir yıldızın deviniminin dört boyutlu bir modelinde kaotik dinamikleri gösteren bir makale yayımladı. Durum uzamındaki hacimlerin daralma göstermediği dizgelerle –buna genellikle güneş tutulmalarını tahmin etmek için kullanılan Newtoncu gökyüzü mekaniği dizgeleri de dâhildir– güneş sistemi ve onun içindeki uzay taşıtlarının geleceğini izleyenler *Hamilton dizgesi* olarak adlandırılır. Şekil 17, bir Hamilton dizgesi olan Hénon-Heiles dizgesinden bir kesittir. Kaotik yörüngeler denizinde girift bir halde iç içe geçmiş boş adalara dikkat edin. Bu adalarda işe koşulan başlangıç durumları



17. Hénon-Heiles çekicisinin iki boyutlu kesiti. Aynı anda gelişen döngülere ve birçok (boş) ada içeren kaotik denize dikkat edin.

neredeyse kapalı döngülere (halkalara) kapılabilir ya da bir ada zinciri içinde kapalı kalan kaotik yörüngeler izle-yebilir. Her iki durumda da, zincir içindeki adaların hangi düzen içinde ziyaret edildiği tahmin edilebilir, ama her bir adada tam olarak nereye denk düşeceği tahmin edileme-yebilir; ne olursa olsun, mesele yalnızca küçük uzunluk ölçütlerinde tahmin edilemez durumdadır.

Kaos içgörüsünün kullanılması

1963 ile 1965 arasındaki üç yıllık dönemde, her biri "kaotik dinamik" adını alacak olguyu tanıtmak için diji-

tal bilgisayar kullanan birbirinden bağımsız üç makale (Lorenz'in, Moore ve Spiegel'in, Hénon ve Heiles'in makaleleri) yayımlandı. Japonya'da, kaos, Yoshisuke Ueda tarafından analog bilgisayar deneyleriyle gözlenmişti; Rus matematikçiler bir yüzyılı aşkın bir süre boyunca uluslararası matematik tarafından atılan temelleri ilerletmekteydi. Bundan neredeyse 50 yıl sonra, bizler hâlâ bu kavrayışları kullanmanın yeni yollarını bulmaktayız.

Geleceğin güneş tutulmalarının tahmin edilebilirliğini sınırlandıran nedir? Mevcut ölçümlerimizin sınırlı düzeydeki kesinliğinden ötürü gezegenlerin yörüngeleri hakkındaki bilgimizdeki belirsizlik mi? Yoksa Dünya yüzeyinde tutulmaya maruz kalan noktanın değişmesine neden olan, gelecekte günlerin uzunluğunun farklı olması mı? Ya da Newton'ın denklemlerinde genel görelilik tarafından (daha iyi) betimlenen etkilerden ötürü gerçekleşen hatalar mı? Ay'ın yavaş yavaş Dünya'dan uzaklaşmakta olduğunu görebiliyoruz ve bunun böyle sürmesi durumunda sonunda Güneş'in tamamını örtemeyecek kadar küçülecek. Bu durumda, son bir tam güneş tutulması yaşanacak. Bu olayın ne zaman gerçekleşeceğini ve –hava koşulları olanak verirse– bunu izleyebilmek için Dünya yüzeyinde nerede olmamız gerektiğini tahmin edebilir miyiz? Bu sorunun yanıtını bilmiyoruz. Güneş sisteminin istikrarlı olup olmadığını da kesin olarak bilmiyoruz? Newton yalnızca üç gök cisminin nihai istikrarını belirleme konusunda doğrusal olmayan veçhelerin ortaya koyduğu zorlukların farkındaydı ve güneş sisteminin istikrarını sağlamanın Tanrı'nın görevi olduğunu söyledi. Hamilton dizgelerinin kabul ettiğine benzer kaotik yörünge türlerini anlamak yoluyla

bizler güneş sisteminin nihai istikrarı konusunda çok şey öğrendik. Şu anda en iyi tahminimiz güneş sistemimizin istikrarlı olduğudur – muhtemelen. Buna benzer bilgiler, gözlemlere dayanan ayrıntılı hesaplamalara kalkışmaktan ziyade, durum uzamındaki geometriyi anlamak sayesinde mümkün oldu.

Düşük boyutlu dizgelerin matematiksel davranışından bir şeyler öğrenebilir miyiz? Bu dizgeler deneylerde aranacak yeni olgular –örneğin, periyodik çiftleyici– ya da Doğa'da tahmin edilecek yeni sabitler –örneğin, Feigenbaum sayısı– olabileceğini göstermekte. Bu basit dizgeler, ayrıca, tahmin yöntemlerimiz için deney alanı da sağlamaktadır; bu ise bir parça tehlikeli. Düşük boyutlu kaotik dizge olguları daha karmaşık dizgelerde gözlemlediklerimizle aynı olgular mı? Lorenz 1963 ya da Moore-Spiegel dizgesi gibi basit düşük boyutlu dizgeler içinde *bile* ortaya çıkacak kadar sıradan olgular mı? Ya da bu olgular bu örneklerin basitliğinden mi kaynaklanıyor – *yalnızca* basit matematiksel dizgeler içinde mi ortaya çıkmaktalar? *Bile* ve *yalnızca* soruları düşük boyutlu dizgeler üzerinde sınanan kaotik tahmin ya da denetim dizgeleri için de geçerli: bu şeyler *yalnızca* düşük boyutlu dizgeler mi – yoksa dizgeler içinde *bile* oluşuyor mu? Şu ana kadar verilmiş en sağlam yanıt, düşük boyutlu dizgelerde tanımladığımız zorlukların daha yüksek boyutlu dizgelerde ender olarak ortadan kalktığı, bu zorluklar için bulunan ve düşük boyutlu dizgelerde işe yarayan başarılı çözümlerin ise daha yüksek boyutlu dizgelerde genellikle işe yaramadığı. Lorenz yaklaşık 50 yıl önce 28 boyutlu bir dizgeye geçiş yaptı; bugün hâlâ yeni dizgeler yaratıyor – bazıları iki, diğerleri de 200 boyutlu.

Kaos ve doğrusalsızlık birçok alanı etkilemektedir; belki, buradan alınacak en önemli ders, karmaşık görünen çözümlerin bazen kabul edilebilir oldukları ve haricî dinamik gürültüden kaynaklanmalarının gerekmemesidir. Bu, elbette, herhangi bir durumda, haricî dinamik gürültüden kaynaklanmadıkları anlamına gelmez; geçmişinde neredeyse bir asırlık deneyim ve elverişli istatistiksel uygulamalar bulunan düzensiz istatistiksel modelin uygulama değerini de azaltmaz. Yalnızca testler ve bu testlerin belirli bir uygulama için kullanılabileceği yöntemler yaratmanın değerini ve ele alınan bütün modellemeler için tutarlılık testlerinin gerekli olduğunu anlatır. Modellerimiz olabildiğince serbest olmalı, ama fazla serbest de olmamalı. Bu basit dizgelerin kalıcı etkisi, onların pedagojik değeri olabilir; gençlere eğitimlerinin başında bu basit dizgelerin zengin davranışları tanıtılabilir. Matematik, içsel tutarlılığı şart koşarak, metaforlar çizerken hayallere dalmamızı sınırlar – onları fiziksel gerçekliğe yaklaştırarak olmasa da, genellikle yeni kapılar açarak.

V. Bölüm

FRAKTALLAR, TUHAF ÇEKİCİLER, BOYUT(LAR)

Büyük pirelerin küçük pireleri
vardır onları ısırsın diye.
Ve küçük pirelerin de daha küçük pireleri
ve bu böyle sürüp gider.

A. de Morgan (1872)

Fraktallar konusuna değinmeden kaos konulu hiçbir tanıtım tam olamaz. Bunun nedeni, ne kaosun fraktalları gerektirmesi ne de fraktalların kaosu gerektirmesidir; yalnızca, yitirgen kaosta gerçek matematiksel fraktallar adeta durup dururken ortaya çıkıverir. Matematik dizgelerde kaosla ne demek istediğimiz ile fiziksel dizgelerde kaosla ne demek istediğimizi birbirinden ayırmak ne kadar önemliyse, matematiksel fraktalları fiziksel fraktallardan ayırmak da o kadar önemli. Onyıllardır süregelen tartışmalara karşın matematiksel ya da fiziksel açıdan fraktal konusuna dair herkesin üzerinde uzlaştığı tek bir tanım

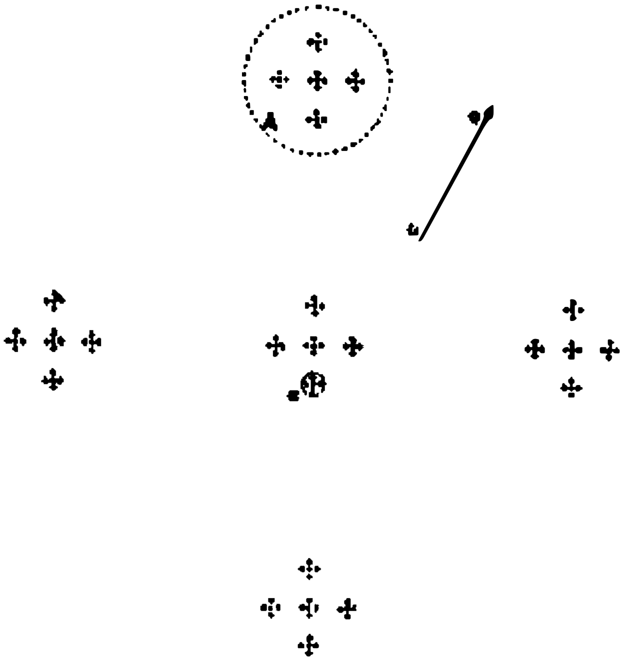
yok – oysa, gördüğünüzde fraktalı genellikle tanırsınız. Bu kavram özbenzeşlikle çevrili: bulutların, ülkelerin ya da kıyıların sınırlarına yaklaştığımızda daha büyük boyutlarda görülenlerde benzer kalıpları tekrar tekrar görmekteyiz. Aynısı Şekil 18'deki noktalar setinde de söz konusu. Buradaki set beş nokta kümesinden oluşmakta; bu kümelerden herhangi birini büyütürsek, büyütülmüş görüntünün bütün setin kendisine benzediğini buluruz. Eğer bu benzerlik tamsa –eğer bu yakın çekim, özgün sete özdeşse–, o zaman, bu sete *tamamen özbenzeş* denir. Eğer yalnızca ilginç istatistiksel özellikler yineleniyorsa, o zaman da sete *istatistiksel açıdan özbenzeş* denir. Neyin tam olarak "ilginç istatistiksel özellik" olacağına karar vermek genel bir tanım üzerinde uzlaşılmasını engelleyen tartışmalardan birini başlatır. Bu ilginç ayrıntıları çözmek apayrı bir *fraktallar* kitabı gerektirecektir; biz burada birkaç örnekle sınırlı kalacağız.

18. yüzyılın sonlarında, fraktallar, Georg Cantor da dâhil olmak üzere matematikçiler tarafından enine boyuna tartışıldı – gerçi Cantor'un adını taşıyan ünlü Orta Üçüncüler seti ilk olarak Henry Smith adında Oxfordlu bir matematikçi tarafından bulunmuştu. Bunu izleyen 100 yılda, tam da L. F. Richardson çeşitli fiziksel fraktalların fraktal doğasını nitelendirmeye başlarken, fraktal varlıklar matematik kökenli ebeveynleri tarafından genellikle canavarsı eğriler oldukları gerekçesiyle reddedilmekteydi. Astronomlar, meteoroloji uzmanları ve toplumbilimciler hem fiziksel hem de matematiksel fraktalları sıcak karşıladı. Matematiksel bir uzam ile gerçek dünya uzamı arasındaki ayrılığı birleştiren ve aradaki ayrımı bulanıklaştıran ilk fraktallardan biri yaklaşık 100 yıl önce Olbers'in paradoksunu çözme çabasıyla ortaya çıktı.

Olbers'in paradoksuna fraktal bir çözüm

1823'te, Alman astronom Heinrich Olbers, astronomların yüzyıllardır ilgilendiği bir konuyu tek bir soruda topladı: "Gece gökyüzü neden karanlıktır?" Eğer evren sonsuz düzeyde genişse ve aşağı yukarı düzenli bir biçimde yıldızlarla doluysa, o zaman, belirli bir mesafedeki yıldızlar ile bunların her birinden aldığımız ışık arasında bir denge olmalı. Bu nazik denge de gece gökyüzünün düzenli bir biçimde parlak olması gerektiği anlamına gelir; hatta, benzer biçimde, parlak ve aydınlatılmış gündüz gökyüzünde de Güneş'i görmek zorlaşacaktır. Ama gece gökyüzü karanlıktır. Bu, Olbers'in paradoksudur. Johannes Kepler 1610'da yıldızların sayısının sınırlı olduğunu ileri sürerken bu paradokstan yararlandı. Edgar Allan Poe bugün hâlâ moda olan görüşü ilk dile getiren kişiydi: gece gökyüzü karanlıktır, çünkü çok uzaklardaki yıldızların ışığının Dünya'ya erişmesi için henüz yeterli zaman geçmemiştir. 1907'de, St.-Albanslı Fournier, zarif bir alternatif getirerek evrende maddenin dağılımının düzenli ama fraktal bir biçimde gerçekleştiğini ileri sürdü. Fournier bu önermesini Şekil 18'de verilen çizimle örneklendirdi. Bu sete Fournier Evreni denir. Kesin bir biçimde özbenzeştir: küçük küplerden birini 5 çarpanla büyütmek özgün setin bire bir kopyasını verir. Her bir küçük küp bütünün tamamını içerir.

Fournier Evreni, Olbers'in paradoksuna getirilen bir çözüm örneğidir: Fournier'nin Şekil 18'e yerleştirdiği hat, başka hiçbir "yıldız"ın asla mevcut olmadığı birçok yönden birini gösterir. Fournier sonsuz ölçüde genişle yetinmeyerek bu basamağı sonsuz ölçüde küçüğe doğru uzattı; atom-



18. Fournier Evreni, bizzat Fournier'nin 1907'de yayımladığı haliyle, özbenzeş yapıyı gösteriyor.

ları yine daha küçük parçacıklarda oluşan mikro-evrenler olarak yorumlayıp galaksilerimizdeki makro-evrenlerin atomların rolünü oynayacaklarını ileri sürdü. Bu yolla da hiçbir içsel ya da dışsal kesinti taşımayan pek az fiziksel fraktaldan birini önerdi: *Siyah Giyen Adamlar* filminin son

sahnelerini anımsatan bir tarzda, sınırsız ölçüde genişten son derece küçüğe uzanan bir basamak.

Fizikte fraktallar

Büyük sarmalların küçük dolambaçları var,
onların ivintisiyle beslenen.
Ve küçük dolambaçların da daha küçük dolambaçları var,
Ve bu böyle sürüp gider, akışkanlığa dek.

L. F. Richardson

Bulutlar, dağlar ve sahil şeritleri doğal fraktalların en sık rastlanan örnekleridir: gerçek uzamda var olan, istatistiksel açıdan özbenzeş varlıklar. Fraktal bir düzensizlik üretmeye duyulan ilgi yeni değil: Newton'un kendisi, ilk çözüm önerilerinden birini kaydederek, süte bira döktüğünde ve "karışım kuruyana kadar bekletildiğinde, kesilmiş maddenin yüzeyi herhangi bir yerde dünya yüzeyi kadar engebeli ve dağlık görünür" demekteydi. Newton'un kesilmiş maddesinin aksine, kaos fraktalları fiziksel karşılıklarına benzemez. Fark nerededir? Birincisi, fiziksel bir fraktal yalnızca bir fraktalın belirli uzunluk ölçütlerindeki özelliklerini gösterirken diğerlerini göstermez. Bir bulutun kenarını düşünün: gitgide daha yakından baktığınızda, gitgide daha küçük uzunluk ölçütlerine başvurduğunuzda, öyle bir noktaya ulaşırsınız ki artık bir sınır yoktur; bulut moleküllerin gelişigüzel telaşı içinde gözden kaybolur ve ölçülecek bir sınır kalmaz. Benzer biçimde, bulut, Dünya'nın boyutuyla kıyaslanabilir uzunluk ölçütlerinde

özbenzeş değildir. Fiziksel fraktallar söz konusu olduğunda, çok yakından baktığımızda fraktal kavramı çöker; bu fiziksel kesintiler dalga tanklarında model gemiler kullanan eski Hollywood özel efektlerinin ayırdına varmayı kolaylaştırır. Kesinti yerinin "gemiler"e göre yanlış uzunluk ölçütünde olduğunu hissedebiliriz. Günümüzde, Hollywood ve Wellington'daki film yapımcıları kesintileri daha iyi gizleyen bilgisayar hileleri üretecek kadar matematik öğrenmiş durumda. Japon sanatçı Hokusai, 1830'larda yaptığı ünlü "Büyük Dalga" baskısında bu kesintiye riayet ediyordu. Fizikçiler de bunu bir süredir bilmekte: de Morgan'ın şiiri birbiri ardına sıralanmış pirelerin sonsuza erişmesine olanak sağlarken, L. F. Richardson'ın versiyonunda sarmallar –sıvılar içindeki sürtünme bağlamında kullanılan terim olan– ivintiden ötürü bir sınırla karşılaşmaktadır. Richardson türbülans kuramı ve gözlemi konusunda bir uzmandı. Bir keresinde, Cape Cod Kanalı'nın bir ucunda, düzenli aralıklarla suya karakavzalar atmış, sıvının akıntıyla aşağı ilerlerken nasıl bir yayılım gösterdiğini ölçmek için kanalın diğer ucundaki bir köprüye varış zamanlarını kullanmıştı. Ayrıca, Birinci Dünya Savaşı esnasında ilk sayısal hava tahminini (elle!) hesapladı.

Birinci Dünya Savaşı'nda Meteoroloji Bürosu'ndan ayrılarak Fransa'da ambulans sürücülüğü yapan Quaker kökenli Richardson, daha sonraları ülkeler arasındaki sınırın uzunluğunu –bu uzunluğun ülkelerin savaşa girme olasılığını etkilediği kuramını sınamak amacıyla– ölçmekle ilgilendi. Farklı haritalar üzerinde aynı sınırı ölçerken tuhaf bir etki tanımladı: İspanya ile Portekiz arasındaki sınır, Portekiz haritası üzerinde ölçüldüğünde, İspanya haritasında ölçül-

düğünden çok daha uzundu! Britanya gibi ada devletlerin kıyılarını ölçtüğünde, ölçüm amacıyla kıyı üzerinde dolaştırdığı pergelin açısı daraldıkça kıyı uzunluğunun arttığını buldu; ayrıca, bir adanın alanı ile çevre uzunluğu arasında beklenmedik bir ilişki buldu: farklı ölçeklerle ölçüldüklerinde her ikisi de değişkenlik göstermekteydi. Richardson uzunluk ölçeğindeki bu değişkenliklerin çok düzenli bir örüntü izlediğini ve bunun da belirli bir sınır için tek bir sayıyla özetlenebileceğini gösterdi: bir eğrinin uzunluğunu, onu ölçmek için kullanılan uzunluk ölçütüyle ilişkilendiren bir katsayı. Mandelbrot'un temel düzeydeki çalışmalarından ötürü bu sayıya sınırın *fraktal boyutu* denir.

Richardson fiziksel fraktalların fraktal boyutunu tahmin etmek için birtakım yöntemler geliştirdi. Alan-çevre uzunluğu yöntemi, daha yüksek çözünürlük altında alan ve çevre uzunluğunun nasıl değiştiğini ölçer. Tek bir nesne için –örneğin, tek bir bulut– bu ilişki ayrıca sınırının fraktal boyutunu da ortaya koyar. *Aynı* çözünürlük altında birçok *farklı* buluta baktığımızda –örneğin, uzaydan çekilmiş bir fotoğrafa– alanlar ile çevre uzunlukları arasında benzer bir ilişki ortaya çıkar; bulutların birbirlerine benzememekle tanındıkları düşünüldüğünde, bu alternatif alan-çevre uzunluğu ilişkisinin neden farklı boyutlarda bulutlar toplamı için geçerli gibi göründüğünü anlamış değiliz.

Durum uzamında fraktallar

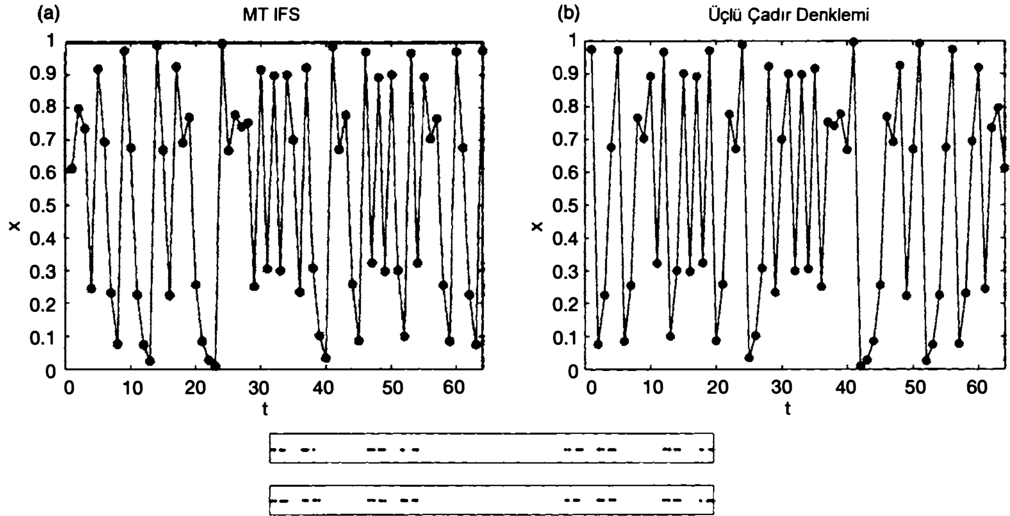
Şimdi de kaosun en dirençli ve yanlış yönlendirici mitlerinden birini bertaraf etmek için tasarlanmış oldukça

yapay bir matematiksel dizge yaratıyoruz: bu mite göre, durum uzamında bir fraktal set belirlemek determinist dinamizmi işaret eder. Üçlü Çadır Denklemi şöyledir:

> Eğer X yarımdan daha az ise, o zaman, X'in yeni değeri olarak 3X'i al. Aksi halde, X'in yeni değeri olarak 3 eksi 3X'i al.

Sıfırla bir arasındaki hemen her başlangıç durumu kökenden uzaklaşır; bunları dikkate almayıp sonsuza dek sıfırla bir arasında kalan sonsuz sayıda başlangıç koşuluna odaklanacağız. (Apaçık ortada olan paradoksu dikkate almamamızın nedeni burada "sonsuzluk" kavramının çok gevşek kullanılması; ama Newton'un uyarısını da unutmayalım: "bütün sonsuzlukların eşit olduğu prensibi riskli bir prensip".)

Üçlü Çadır Denklemi kaotiktir: açıkça deterministtir, yörüngeler yinelemelidir ve her bir yinelenmede son derece yakın noktalar arasındaki ayrım üç çarpan değerinde artar – bu da duyarlı bağımlılığa işaret eder. Üçlü Çadır Denklemi'nden bir zaman serisi ile düzensiz Orta Üçüncüler YİD Denklemi'nden bir zaman serisi Şekil 19'da gösterilmekte. Görsel açıdan, kaotik denklemi tahmin etmenin daha kolay olduğunun kanıtlarını görebiliyoruz: X'in küçük değerlerinin ardından *daima* X'in küçük değerleri gelmekte. Şekil 19'un alt tarafındaki iki küçük ek, dizgelerden birinin uzun bir yörünge tarafından ziyaret edilmiş bir noktalar setini göstermekte; çok benzer görünmekteler ve aslında ikisi de Cantor'un Orta Üçüncüler setinden noktaları gösteriyor. İki dinamik dizgenin ikisi de aynı

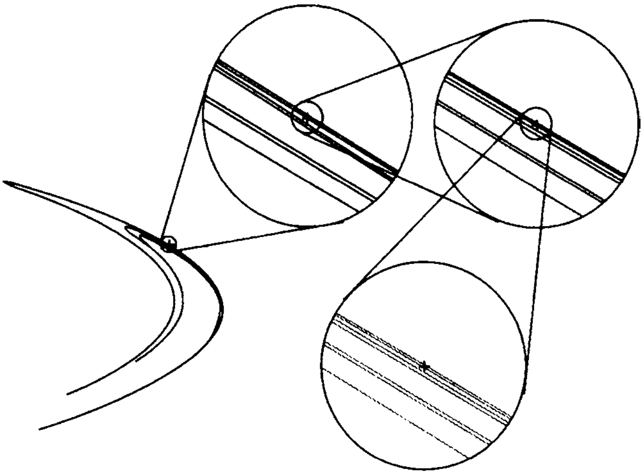


19. (a) Düzensiz Orta Üçüncüler YİD Denklemi ile (b) determinist Üçlü Çadır Denklemi'nden bir zaman serisi. Aşağılardaki ekler ziyaret edilmiş bütün noktaların özetini gösterir: her bir durumda, Orta Üçüncüler Cantor setine dair kestirimler var.

fraktal seti ziyaret ettiği için, yalnızca sistemlerin ziyaret ettiği noktaların boyutuna bakarsak determinist dizgeyi düzensiz dizgeden asla ayırt edemeyiz; ama dinamikleri anlamak için yalnız dizgenin nerede bulunduğunu değil, nasıl devindiğini de incelememizin gerekmesi sürpriz sayılır mı? Bu basit karşı örnek yukarıda belirtilen miti yok etmektedir; kaotik dizgeler genellikle fraktal setler üzerinde devinebilse de, sınırlı bir boyutsal setin belirlenmesi ne determinizme ne de kaotik dinamiğe işaret eder.

Özenle kotarılmış matematiksel denklemlerde fraktallar bulmak çok da şaşırtıcı değil, zira matematikçiler fraktallar yaratan denklemler tasarlayacak kadar zekidir. Yitirgen kaos konusunda en derli toplu şeylerden biri, fraktalların zekice bir tasarım marifetinden bağımsız ortaya çıktıklarıdır. Hénon Denklemi klasik bir örnektir. Matematiksel açıdan, eksiksiz bir ilginç modeller setini temsil eder; Orta Üçüncüler YİD Denklemi'nde olanın aksine, tanımında "fraktal görünümlü" hiçbir şey yok. Şekil 20'de sanki bir büyü sonucu gerçekleşirmiş gibi özbenzeş yapıların ortaya çıkıverdiği bir dizi kestirim gösterilmekte. Bu, hiç kuşkusuz, doğrusal olmayan dinamik dizgelerin en hayret verici özelliklerinden biridir. Hénon Denklemi'nde yapay bir tasarıma yönelik hiçbir ipucu yok ve fraktal yapı da yitirgen kaotik dizgenin çekicilerinde sıradan gözüküyor. Bu ne kaos ne de tersi için geçerli – ama sıradan.

Bütün büyülerde olduğu gibi, hilenin nasıl işlediğini anlayabiliriz – en azından her şey olup bittikten sonra: Hénon Denklemi'nde sabit bir noktaya odaklanmayı seçtik ve denklemin bu noktaya çok ama çok yakın özelliklerine bakıldığında, özbenzeşliğini böylesine çarpıcı kı-



20. Hénon Denklemi'nin, her bir yaklaşımda bir "+" ile işaretlenen istikrarsız sabit noktasına dair bir dizi kestirim. Aynı örüntü –biz veri noktalarını tüketene kadar– tekrar eder.

labilmek için ona ne kadar yaklaşılması gerektiği ortaya çıkıyor. Yinelenen yapının –kalın bir çizgi ve iki daha ince çizgi– ayrıntıları bu noktadan çok uzakta neler olduğuna bağlı. Ama, eğer Hénon gerçekten de kaotikse ve bu resimleri yapmak için kullanılan bilgisayar yörüngesi gerçekçiyse, o zaman, doğal olarak bir fraktal çekicimiz var demektir.

Durum uzamında türbülansa ilişkin geleneksel kuram, Richardson'ın şiirini yansıtmaktaydı: gitgide daha fazla periyodik modun harekete geçirileceği ve bütün bu salınımların doğrusal toplamının çok yüksek boyutlu bir durum uzamı gerektireceği düşünülmekteydi. Bu nedenle

de bir çok fizikçi türbülans çekicilerinin yüksek boyutlu bir şekerli çörek olmasını ya da, matematik diliyle konuşursak, yumru biçimli olmasını beklemekteydi. 1970'lerin başlarında, David Ruelle ile Floris Takens, yüksek boyutlu yumruları düzgün bir hale getirecek alternatif üzerinde çalışırken daha düşük boyutlu fraktal çekicilerle karşılaştı; fraktal çekicileri "tuhaf" buldular. Günümüzde "tuhaf" sözcüğü çekicinin geometrisini, özellikle de çekicinin bir fraktal olduğu gerçeğini betimlemekte kullanılır; "kaos" ise dizgenin dinamiğini betimlemek için kullanılır. Bu yararlı bir ayrım. "Tuhaf çekici" ifadesinin tam kökeni bugün bilinmiyor, ama bu terim matematiksel fiziğin bu nesneleri için esin verici ve uygun bir etiket olduğunu kanıtladı. Hamilton dizgelerinin hiç çekicisi olmadığı için, bu dizgelerin tuhaf çekicileri de yoktur. Yine de, Hamilton dizgelerinden alınan kaotik zaman serileri, genellikle yalın türdeşsizliğin (inhomogeneity) yanı sıra bilgisayarlarımızı işlettiğimiz sürece kalıcı olan ve *tuhaf birikeçler* (stange accumulators) adı verilen özbenzeşliğin ipuçlarını taşıyan girift kalıplar geliştirir. Nihai gelecek bilinemez olmayı sürdürür.

Fraktal boyutlar

Durum yöneyindeki bileşenlerin sayısını saymak, bize durum uzamının boyutunu söyler. Ama bir noktalar setinin boyutunu nasıl tahmin edeceğiz, eğer ki bu noktalar bir sınır tanımlamıyorsa – örneğin, bir tuhaf çekici oluşturan noktalar söz konusuysa? Alan-çevre uzunluğu ilişkisini anımsatan bir yaklaşım; setin tamamını belirli bir boyut-

taki kutularla kaplamak ve tek tek kutuların boyu küçüldükçe gereken kutuların sayısının nasıl arttığına bakmak. Bir diğer yaklaşım, raslantısal bir noktada ortalanmış bir topun içine bakıp topun yarıçapını azaltırken noktaların sayısının ortalama olarak nasıl değiştiğini ele almaktır. Bir çekicinin kıyısına yakın yerlerde ortaya çıkan sorunlardan kaçınmak için de matematikçimiz yalnızca neredeyse yok denecek kadar küçük r yarıçapına sahip topları dikkate alacaktır. Tanıdık görünen sonuçlar elde ederiz: bir hat üzerindeki raslantısal bir noktada noktaların sayısı r^1 ile orantılı; bir düzlem içindeki bir nokta civarında πr^2 ile orantılı; somut bir küpü tanımlayan setteki bir nokta civarında $4/3\pi r^3$ ile orantılı. Her bir durumda r'nin üstsayısı setin boyutunu yansıtır: set bir hat oluşturuyorsa bir, bir düzlemse iki, somutsa üç.

Fraktal setler bütün ölçeklerde boşluklar denen deliklere sahip olma eğilimi gösterse de, bu yöntem fraktal setlere uygulanabilir. Bu logaritmik kırışıklıklarla (wrinkles) uğraşmak önemsiz sayılmasa da, tamamen özbenzeş setlerin boyutunu eksiksiz ölçebilir ve bir fraktalın boyutunun çoğunlukla bir tamsayı olmadığının hemen farkına varabiliriz. Fournier Evreni için boyut -0.7325'dir (log 5/log 9'a karşılık gelir); Orta Üçüncüler Cantor seti ise -0.6309 boyutuna sahiptir (log 2/log 3'e karşılık gelir). Her bir durumda, boyut sıfırdan büyük ama birden küçük bir kesirdir. Mandelbrot fraktal sözcüğünün kaynağı olarak kesir anlamına gelen "fraction" sözcüğünün kökündeki "fract"ı kullandı.

Hénon çekicisinin boyutu nedir? En iyi tahminimiz -1.26, ama bir çekici olduğunu bilsek bile, uzun vadede

bu çekicinin yalnızca uzun bir periyodik döngü olup olmadığını kesin olarak bilmiyoruz. Denklemlerde her bir periyodik döngü yalnızca sınırlı sayıda noktadan oluşur ve bu nedenle de sıfır boyuta sahiptir. Bunu görmek için döngü üzerindeki en yakın nokta çiftinden daha küçük bir r yarıçapına sahip toplar düşünün; her bir toptaki noktaların sayısı sabittir (ve bire eşittir) ve biz bunu r^0'a orantılı olarak yazabiliriz; bu durumda da her biri sıfır boyuta sahiptir. VII. Bölüm'de bir bilgisayar simülasyonu kullanarak uzun vadede neler olduğunu kanıtlamanın neden zor olduğunu göreceğiz. Önce, matematiksel dizgeleri kusursuz ölçüde bildiğimizde bile belirsizliğin dinamiğini hesaplamanın zorluğuna yakından bakacağız. Gerçek dünya dizgeleri söz konusu olduğunda elimizde yalnızca gürültü dolu gözlemler var ve sorunu çözmek daha da zor.

VI. Bölüm

BELİRSİZLİĞİN DİNAMİĞİNİN HESAPLANMASI

Kaos, belirsizliğin dinamiğini incelediğimizde önyargılarımızı gözler önüne serer. Belirsizlikle ilişkili abartılı bilgilere karşın, kaosu belirlemekte kullanılan niceliklerin bugünkü tahminler üzerine hiçbir sınırlama getirmediğini göreceğiz: kaos, kestirimin faydasız olduğu anlamını taşımaz. Belirsizliği ölçmek için kullanılmış istatistiklerin tarihine baktığımızda kaos ile tahmin edilebilirlik arasındaki bağlantının neden bu kadar kötü bir biçimde abartıldığını görebiliriz. Bugün fazladan istatistikler mevcuttur.

Bilim insanları, belirsizlik ve tahmin edilebilirlik konularına el attıklarında, tahminlerinin uygunluğunu ve bu tahminleri yapmak için kullanılan istatistikleri açıklığa kavuşturmayı onur meselesi haline getirir. La Tour'un tablosundaki yaşı ilerlemiş adam, genç adama 52 kartlık bir deste için her bir partideki olabilirliklerin doğru tablolarını sağlamış olabilir, ama bu olabilirliklerin oynanmakta olan oyunu yansıtmadığını bilir. Benzer biçimde, 21. yüzyıl

şeytanımız da kusursuz modeli sayesinde belirsizliğin dinamiğini oldukça doğru hesaplayabilir, ama bizim kusursuz bir modelimiz yok. Elimizde kusursuzluktan uzak birtakım modeller varken bunların davranışlarının çeşitliliğini gerçek dünyanın gelecekteki durumuna ilişkin belirsizliğimizle nasıl ilişkilendirebiliriz?

Kesinliğin çöküşü: bağıntıdan yoksun bilgi

Bir dizgenin bundan sonra ne yapacağını tahmin etmek söz konusu olduğunda, dizgenin yakın zamanlardaki durumuna ilişkin veriler dizgenin uzun geçmişteki durumuna ilişkin verilerden genellikle daha fazla bilgi sağlayacaktır. 1920'lerde, Yule, Güneş lekelerine ilişkin mevcut yıla has verilerin takip eden yıl ortaya çıkacak lekeler hakkında daha fazla bilgiyi on yıl önceki verilere kıyasla ne ölçüde verebileceğini hesaplamak istedi. Böyle bir istatistik, aynı zamanda, özgün verilerin özelliklerini modeller tarafından üretilenlerin özellikleriyle nicel açıdan kıyaslamaya olanak sağlayacaktı. Birbirinden "k" yineleme kadar uzak olan durumlar arasındaki doğrusal bağıntıyı ölçen ve bugün öz-bağıntı işlevi (ACF) denen işlevi icat etti. Her sayı kendisiyle kusursuz biçimde bağıntılı olduğu için, k sıfır olduğunda ACF bir olur. Eğer zaman serisi periyodik bir döngüyü yansıtıyorsa, k artarken ACF azalır ve ardından da k periyodun tam bir katsayısı olduğunda eşittir bire döner. Doğrusal düzensiz bir dizgenin verileri söz konusu olduğunda ACF büyük değer taşır ama, kısa sürede göreceğimiz gibi, doğrusal olmayan bir dizgeden

edinilen gözlemlerle karşılaştığında pek işe yaramaz. Yine de, bazı istatistikçiler determinizmi doğrusal bir bağıntı olarak tanımlayacak kadar ileri gitti; birçokları hâlâ bu yanlış adımla sendelemekte. Bağıntının nedensellik anlamına gelmediği çok iyi bilinir; kaos çalışmaları nedenselliğin (doğrusal) bağıntı anlamına gelmediğini de açıklığa kavuşturdu. Tam Lojistik Denklem'in ardışık durumları arasındaki bağıntı sıfırdır – bir sonraki durumun tamamen mevcut durum tarafından belirlenmesi gerçeğine karşın. Aslında, zamanda her bir ayrım için ACF'si sıfırdır. O zaman, eğer istatistiksel analizin bir asırlık temel dayanağı bu tür görünür ilişkileri göremiyorsa, tahmin edilebilirliği belirlemek bir yana, doğrusal olmayan dizgeler arasındaki ilişkileri nasıl fark edeceğiz? Bu soruya yanıt vermek için baz ikiyi (base two) tanıtmamız gerekir.

Parça bölük bilgiler

Bilgisayarlar sayıları ikili işaretleme olarak kaydeder: okulda öğrendiğimiz on simgeyi (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9) kullanmak yerine, bilgisayarlar yalnızca bunların ilk ikisini (0 ve 1) kullanır. 10^3, 10^2 ve 10^1 ile temsil edilen 1000, 100 ve 10 yerine, ikili dizgede bu simgeler 2^3, 2^2 ve 2^1'i temsil eder – yani sekiz, dört ve iki. Baz ikide 11 simgesi $2^1 + 2^0$, yani üç, 0.10 ise 2^{-1} (bir buçuk), 0.001 ise 2^{-3} (sekizde bir) yerine geçer. Dünyada on tür matematikçi olduğu esprisi de buradan doğar: ikili işaretlemeyi anlayanlar ve anlamayanlar. Nasıl ki onla (10) çarpmak baz on düzeninde kolaysa, ikiyle (10) çarpmak da baz iki düze-

ninde kolaydır: tek yapmanız gereken bütün parçaları sola kaydırmaktır; böylece, 1.0100101011 artık 10.100101011 haline gelmektedir – Kaydırma Denklemi de adını buradan alır. İkiye bölmek de buna benzerdir; yalnızca sağa doğru bir kaydırma.

Bir bilgisayar genellikle her bir sayı için belirlenmiş bir sayı kullanır ve "ondalık" sayıları depolamak için de değerli bellek alanını boşa harcamaz. Bu da bölme işlemini biraz tuhaf bir hale getirir. Bir bilgisayarda 00101001010110 sayısını ikiye bölmek 00010100101011 sonucunu verir; ama 00101001010101 sayısını ikiye bölmek de aynı sonucu verir! 00010100101011 sayısını ikiye bölmek 0010100101011Q sayısını verir – burada Q bilgisayarın uydurmak zorunda olduğu yeni birimdir. Sola doğru her bir kaydırma için de aynısı geçerlidir: en sağdaki boş yer için yeni bir parça gerekir. İkiye bölme işleminde en soldaki boş yerde bir adet sıfır doğru bir biçimde belirir, ama bu pencerenin sağ tarafında kaydırılan her bir ikil, ikil kovada yok olur gider. Bu da rahatsızlık verici bir özelliği gözler önüne serer: eğer biz bir sayı alıp bunu ikiye böler ve ardından da ikiyle çarparsak en baştaki sayıyı elde edemeyebiliriz.

Şimdiye kadar dile getirilen karışıklık çeşitli matematiksel dinamik dizgelerine dair farklı büyüme görüşlerine ve belirsizliğin çöküşüne –ya da bilginin yaratılmasına– yol açar: raslantısal dizgeler, kaotik matematiksel dizgeler ve kaotik matematiksel dizgelerin bilgisayarlı versiyonları. Bir dizgenin durumunun evrimi genellikle bir kara kutunun içinden geçen bir bant olarak düşünülür. Kutunun içinde neler olduğu, ne tür bir dinamik dizgeyi izlediğimize bağ-

lıdır. Bant kutudan çıkarken üzerine yazılı olanları görebiliriz: bandın kara kutuya girerken boş olup olmaması ya da önceden üzerinde bir şeyler yazılı olup olmaması fildişi kulelerin kahve salonlarında ateşli tartışmalara yol açar. Seçenekler nelerdir? Eğer dinamikler raslantısalsa, o zaman, bant kara kutuya girer ve üzerine raslantısal olarak belirlenen bir ikil damgalanmış olarak çıkar. Bu durumda, bant sürekli olarak ileri giderken bu ikillerde gördüğümüze inandığımız her türlü kalıp bir seraptır. Eğer dinamik dizge deterministse, ikiller bandın üstüne zaten basılıdır (ve, bizim aksimize, Laplace'ın şeytanı bunların tümünü zaten görebilecek durumdadır); biz bunları kutudan çıktıkları ana kadar net olarak göremeyiz, ama onlar oradadır. Bütün bu bilgi parçalarının yaratılması her iki durumda da bir seraba benzer ve tek bir büyük serabı mı yoksa düzenli bir biçimde akıp giden küçük serapları mı tercih edeceğiniz tam bir kişisel tercih meselesi olup çıkar: determinist bir dizgede tablo aynı anda sonsuz sayıda ikil yaratıma denk düşer: başlangıçtaki durumu oluşturan irrasyonel sayı. Raslantısal dizgede sanki yeni ikiller her bir yinelenmede yaratılmaktadır. Uygulamada, bir şeyi ne kadar doğrulukla ölçtüğümüz konusunda bir parça kontrole sahip gibiyizdir ve bu da bandın üzerinin önceden yazılı olduğunu akla getirir.

Kaotik dizge tanımında bandın bir süreliğine geri sarmasını engelleyen hiçbir şey bulunmamaktadır. Bu gerçekleştiğinde kestirim bir süreliğine basitleşir, zira bandı zaten gördüğümüz için yeniden ileri gitmeye başladığında kutudan çıkacak ikilleri zaten biliyor oluruz. Bu görüntüyü sayısal bir dizge biçimine sokmaya çalıştığımızda zorlukla

karşılaşırız. Bant kutuya girmeden önce boş olamaz: bilgisayar sola kaymalar gerçekleştirdiğinde bir tür determinist kurala göre bu yeni ikilleri "uydurmak" zorundadır ve bu nedenle de bu ikiller bant kutuya girmeden önce bandın üstüne zaten basılmış haldedir. Daha da ilginci, bandın geri sardığı bir bölgede nelerin olup bittiğidir, zira bilgisayar bir sağa kaymada yitirdiği ikillerin herhangi birini "anımsayamaz". Değişmez eğim denklemlerinde daima sola ya da daima sağa kaydırma yaparız; bant asla geri sarmaz. Bilgisayar simülasyonu hâlâ determinist bir dizgedir, oysa üretebileceği bantların çeşitliliği determinist matematiksel denklemdeki kadar zengin değildir. Eğer simülasyonu yapılan denklem daralan belirsizlik alanlarına sahipse, o zaman, bir geçiş dönemi söz konusudur ve bu esnada bant geri sarar ve bilgisayar bandın üzerine hangi ikillerin yazıldığını bilemez; bant yeniden ileri gittiğinde bilgisayar kendi içsel kuralını kullanarak yeni ikiller oluşturur ve bant kutudan ikinci kez çıktığında üzerinde üst üste basılmış 0 ve 1'ler bulabiliriz! Kaotik matematiksel dizgelerin bilgisayar simülasyonlarında gerçekleşen diğer tuhaf şeyleri VII. Bölüm'de ele alacağız.

Tahmin edilebilirliği tahmin etmek için istatistik

Kaosun içgörülerinden biri bilgi içeriğine odaklanmaktır. Doğrusal dizgelerde değişke bilgi içeriğini yansıtır. Bilgi içeriği, boyutun önemli tek gösterge olmadığı, doğrusal olmayan dizgelerde daha da zor görünür. Bilgiyi başka nasıl

ölçebiliriz? X, Y düzleminde, bire eşit bir yarıçapı olan bir daire üstündeki noktaları düşünelim ve raslantısal olarak bir açı seçelim. X'in değerini bilmek bize Y'nin değeri hakkında çok şey anlatır – Y'nin iki değerden biri olduğunu söyler. Benzer şekilde, X'i temsil etmek için gereken ikillerin tamamını bilmezsek, X'in ne kadar çok ikilini öğrenirsek Y'nin de o kadar çok ikilini biliriz. Y'nin iki alternatif konumu arasında asla bir karara varamayacak olsak bile, iki olası konumla ilgili belirsizliğimiz X'i gitgide daha doğru ölçtüğümüzde azalır. Doğal olarak, X ve Y bu durumda doğrusal bir sıfır bağıntısına sahiptir. Bir değeri bilmenin diğeri hakkında bize nasıl bir şeyler anlattığını belirlemek için başka istatistiksel ölçümler de geliştirilmiştir. Örneğin, *Karşılıklı Bilgi*, X'in bir ikilini daha öğrendiğinizde Y'nin kaç ikilini öğrendiğinizi söyler. Daire açısından, eğer X'in ilk beş ikilini biliyorsanız Y'nin ilk beş ikilinin dördünü bilirsiniz; X'in 20 ikilini bilirseniz Y'nin 19 ikilini bilirsiniz; X'in bütün ikillerini bilirseniz Y'nin biri dışında bütün ikillerini bilisiniz. Eksik ikil olmadan Y'nin iki olası değerinden hangisinin Y'nin gerçek değeri olduğunu bilemeyiz. Ve, ne yazık ki, doğrusal düşünce açısından, elinizde olmayan ikil Y'deki "en geniş" ikilin değeridir. Yine de, bağıntının sıfır olması gerçeğini X'in değerini öğrenmenin ardından Y hakkında hiçbir şey öğrenmeyeceğiniz anlamına geldiği biçiminde yorumlamak yanıltıcı olmaktan da ötedir.

Karşılıklı Bilgi bize Lojistik Denklem dinamikleri hakkında neler söyler? Karşılıklı Bilgi, X'in bir değerini tam olarak bilmenin X'in gelecek değerleri hakkında eksiksiz bilgi sağlayacağı gerçeğini yansıtır. X'in sınırlı ve kesin bir

ölçümü olduğunda, Karşılıklı Bilgi, X'in gelecekteki bir ölçümü konusunda ne kadar bilgimiz olduğunu ortalama olarak yansıtır. Gözlemsel gürültünün var olduğu durumlarda ne kadar uzak bir gelecekteyseler, X'in gelecekteki değerleri hakkında o kadar az bilme eğiliminde oluruz, çünkü X'in mevcut değerinin gelecektekine denk düşen ikilleri gürültü tarafından engellenecektir. Şu halde, Karşılıklı Bilgi zaman içindeki ayrılma arttıkça bozulmakta, doğrusal bağıntı katsayısı ise bütün ayrımlar (sıfır dışında) için sıfır olmaktadır. Karşılıklı Bilgi yararlı bir gereçtir; belirli uygulamalarda kullanılacak ısmarlama istatistikler geliştirmek, doğrusal olmayan dinamik içinde hızla büyüyen bir alandır. Bu istatistiklerin bize tam olarak ne söylediklerini bilmek önemli ve geleneksel istatistiğin bize söyleyebileceğinden daha fazlasının mevcut olduğunu kabullenmek de bir o kadar önemli.

Gürültü modelimiz mevcut belirsizlik hakkında bize bir fikir vermekte; bu nedenle, tahmin edilebilirliğin bir ölçütü, bu belirsizliğin ikiye katlanmasını beklediğimiz zaman olabilir. Dörde katlanma zamanının doğrusal olmayan bir dizgede ikiye katlanma zamanının iki katı olacağını ileri süren doğrusal düşüncenin tuzağından uzak durmalıyız. Hangi zamanın önemli olacağını bilmediğimiz için (ikiye katlanma zamanı, üçe katlanma zamanı, dörde katlanma zamanı...) belirli bir başlangıç koşulunun yakınındaki q kez çoğaltma zamanına göndermede bulunuruz. Bu q kez çoğaltma zamanlarının dağılımı tahmin edilebilirlik açısından uygundur: her bir tahminde belirsizliğimizin bizi ilgilendiren eşikten geçmesini beklediğimiz zamanı doğrudan yansıtırlar. Ortalama belirsizlik çiftleme zamanı, bu

modelden elde edilen tahminlere göre ortalaması alınan aynı bilgiyi verir. Tek bir sayıya sahip olmak kullanışlıdır, ama bu ortalama değer herhangi bir başlangıç durumuna uygun olmayabilir de.

Ortalama belirsizlik çiftleme zamanı tahmin edilebilirlik açısından yararlı bir istatistiktir. Ama matematiksel kaosun tanımı çiftleme (ya da herhangi bir q kez çoğaltma) zaman istatistiğiyle bağlantılı olarak değil, daha ziyade, aşağıda tanımladığımız *Lyapunov katsayıları* ile bağlantılı olarak yapılır. Kaosla tahmin edilebilirliğin genellikle düşünüldüğü kadar yakından ilişkili olmamasının bir nedeni budur. Ortalama çiftleme zamanı öncül Lyapunov katsayısına oranla tahmin edilebilirliğin daha uygulanabilir bir göstergesidir, ama matematikçilerin çok değer verdiği ve –göreceğimiz gibi– Lyapunov katsayılarının sahip olduğu önemli bir uygulama avantajından yoksundur.

Kaos uzun vadede tanımlanır. Belirsizliğin birörnek üstel büyümesi kaotik dizgelerin yalnız en basitlerinde bulunur. Aslında, birörnek büyüme genellikle yalnızca *etkili üstel büyüme* ya da bunun dengi olan *ortalama üstel* büyüme gösteren kaotik dizgeler arasında ender görülür. Ortalama, sonsuz sayıda yinelenmenin sınırında alınır. Bu büyümeyi ölçmek için kullandığımız sayı *Lyapunov katsayısı* olarak adlandırılır. Eğer büyüme tamamen üstelse ve yalnızca ortalama olarak üstel değilse, o zaman, büyümeyi 2 üstü λt olarak hesaplayabiliriz; burada t zaman, λ ise Lyapunov katsayısıdır. Lyapunov katsayısı her bir yinelenme için ikil birimlere sahiptir ve pozitif bir katsayı da belirsizliğimizin her bir yinelenme sonrasında *ortalama olarak* kaç ikil kadar büyüdüğünü gösterir. Bir dizgenin durum uzamındaki

yönlerin sayısı kadar çok Lyapunov katsayısı vardır ve bu da durumu oluşturan bileşenlerin sayısıyla aynıdır. Kullanım kolaylığı açısından azalan bir düzen içinde sıralanırlar ve ilk Lyapunov katsayısı –en büyük olanı– genellikle *öncül Lyapunov katsayısı* olarak bilinir. Altmışlı yıllarda, Rus matematikçi Osceledec çok çeşitli dizgeler için Lyapunov katsayılarının var olduğunu gösterip birçok dizgede *hemen her* başlangıç durumunun aynı Lyapunov bileşenlerini paylaştıklarını kanıtladı. Lyapunov katsayıları bir dizgenin durum uzam içindeki doğrusal olmayan yörüngesi izlenerek tanımlansa da, bu katsayılar yalnızca bu doğrusal olmayan referans yörüngeye son derece yakın olan belirsizliğin büyümesini yansıtır ve belirsizliğimiz sonsuz olduğu sürece tahminlerimize bir zarar veremez.

Lyapunov katsayılarını hesaplamak sınırsız sürelerin ortalamasını almayı gerektirdi ve, çok küçük düzeydeki belirsizliklere dönük ilgiyi sınırlandırdığı için, bu katsayıları matematiksel kaosun teknik tanımına uyarlamak bir dizgeyi kaotik olarak tanımlamaktan ibaret bir yük doğurdu. Buradaki avantaj, bu niteliklerin ta kendilerinin Lyapunov katsayısını derinlerde yatan dinamik dizgenin sağlam bir yansıması haline getirmesidir; durum uzamını alıp gerebilir, katlayabilir, bükebilir ve her türlü deformasyona uğratabiliriz – Lyapunov katsayısı değişmez. Matematikçiler bu tutarlılığa büyük değer verirken Lyapunov katsayıları da bir dizgenin duyarlı bağımlılığa sahip olup olmadığını tanımlar. Eğer öncül Lyapunov katsayısı pozitifse, o zaman, karşımızda sonsuz belirsizliklerin *ortalama üstel* büyümesi durmaktadır ve pozitif bir Lyapunov katsayısı da kaos için gerekli bir bileşen kabul edilir. Ancak, Lyapunov

katsayılarına sağlamlıklarını kazandıran özellikler aynı zamanda onları matematiksel dizgelerde hesaplanması zor, fiziksel dinamik dizgelerde de hesaplanması belki de olanaksız hale getirir. İdealde bunun matematiksel denklem ile fiziksel dizgeler arasındaki ayrımı net olarak yapmamızı sağlaması gerekir.

Lyapunov katsayılarının matematiksel açıdan cezbedici sağlamlığı karşısında bir alternatif bulunmasa da, tahmin edilebilirliği ölçmek için daha uygun nicelikler bulunmaktadır. Bir trenin Oxford'dan Londra'ya geçen hafta ortalama ne kadar sürede gittiğini bilmenin, aynı yolculuğun bugün ne kadar süreceği konusunda, Oxford ile Londra arasındaki mesafeyi İngiltere'de sefer yapan bütün trenlerin ortalama süratine bölmekten daha iyi bir fikir vereceği düşünülebilir. Lyapunov katsayıları bize ortalama sürati verirken çiftleme zamanlar bize ortalama süreleri verir. Doğaları gereği, Lyapunov katsayıları herhangi bir tahminden çok uzaktır.

Şekil 8'de yer alan denklemlere bakın: bunların Lyapunov katsayılarını ya da çiftleme zamanlarını nasıl hesaplarız? Referans alınan bir yörüngenin yakınında devam eden gerilmeyi (ya da daralmayı) hesaplamak istiyoruz, ama eğer denkleminiz doğrusal değilse gerilme miktarı referans alınan yörüngeden ne kadar uzakta olduğumuza bağlı olacaktır. Belirsizliğin yörüngeye son derece yakın durmasını şart koşmak bu potansiyel zorluğu aşar. Bir boyutlu dizgeler için artık her bir noktada denklemin eğimine bakabiliriz. Belirsizliğin zamana bağlı olarak nasıl büyüdüğüyle ilgilenmekteyiz. Büyümeleri birleştirmek için tek tek büyümeleri bir araya toplamalıyız. Eğer kredi

kartı harcamam bir günde iki kat ve iki günde de üç kat artarsa, toplam artış başlangıçtakinin altı katıdır, beş değil. Bu da demektir ki, yineleme başına ortalama büyümeyi hesaplamak için bir *geometrik ortalama* almalıyız. Diyelim ki, belirsizlik ilk yinelemede üç çarpan değerinde arttı, ardından iki, sonra dört, sonra üçte bir, en sonda da dört: toplam olarak beş yinelenmede 32 çarpan değerdedir; şu halde, ortalama olarak artış her bir yinelenme için 2 çarpandır, zira 32'nin kök beşi ikidir, yani: 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32. Biz aritmetik ortalamayla ilgilenmiyoruz: 32 bölü 5, 6.4 eder ve bizim belirsizliğimiz asla herhangi bir günde bu kadar fazla büyümedi. Ayrıca, ortalama artış günde çarpan 2 değerindeyse, gerçek çarpanlar 3, 2, 4, 1/3 ve 4'tü: büyüme birörnek değildi ve bir günde belirsizlik aslında daraldı. Kaotik bir dizge içindeki tahminlerimizin doğruluğu üzerine bahse girsek ve farklı günlerde bahse farklı miktarlar koysak, o zaman, gelecekten *çok* daha emin olduğumuz zamanlar olabilir. Bir diğer mit de sizlere ömür: kaos, tahminin faydasız olduğu anlamına gelmez. Aslında, eğer kaosu tahmin etmenin birörnek düzlemde faydasız olduğuna inanan birine karşı bahse girsek, bu kişiye dersini verebilecek durumda olurduk.

Kaosun en basit (ve en bilinen) örneklerinden bazılarının sabit eğimlere sahip olması kaosun birörnek biçimde tahmin edilemez olduğu yollu aşırı genellemeye yol açtı. Şekil 8'deki altı kaotik dizgeye baktığımızda, bunlardan dördünde (Kaydırma Denklemi, Çadır Denklemi, Çeyrekleme Denklemi, Üçlü Çadır Denklemi) eğimin büyüklüğünün daima aynı olduğunu görürüz. Öte yandan, Lojistik Denklem'de ve Moran-Ricker Denklemi'nde eğim X'in

farklı değerleri için değişkenlik gösterir. Birden daha küçük mutlak değer taşıyan bir eğim daralan bir belirsizlik gösterdiği için, Lojistik Denklem X'in değerlerinin sıfıra yakın ya da bire yakın olduğu durumlarda güçlü ve büyüyen bir belirsizlik gösterir; X'in değerlerinin bir buçuğa yakın olduğu durumlarda da belirsizlikte daralma olur. Benzer biçimde, Moran-Ricker Denklemi de eğimin boyutunun büyük olduğu sıfıra yakın ve bire yakın değerlerde belirsizlikte büyüme gösterirken eğimin sıfıra yakın olduğu X'in orta ve yüksek değerlerinde daralmaktadır.

Sonsuz geleceğe uzanan bir ortalamayı nasıl belirleyebiliriz? Birçok matematiksel güçlük gibi, bunu çözmenin en kolay yolu hile yapmaktır. Kaydırma Denklemi ile Çadır Denklemi'nin doğrusal dinamikte çok popüler olmasının bir nedeni, yörüngeler kaotik iken belirsizliğin büyüklüğünün her bir durumda aynı olmasıdır. Kaydırma Denklemi açısından, her bir sonsuz belirsizlik her bir yinelemede iki çarpan gücünde artar. Bu nedenle de zaman sonsuza uzanırken ortalama almak gibi apaçık zor bir görev de gereksiz hale gelir: eğer belirsizlik her bir yinelenmede çarpan 2 gücünde artıyorsa, o zaman, ortalama çarpan 2 değerinde büyümektedir ve Kaydırma Denklemi de her bir yineleme için bir ikillik Lyapunov katsayısına sahiptir. Çadır Denklemi'nin Lyapunov katsayısını hesaplamak da bu kadar kolaydır: "çadır"ın hangi yarısında olduğumuza bağlı olarak, büyüme ya çarpan iki ya da çarpan eksi ikidir. Eksi işareti büyüklüğün boyutunu etkilemez: yalnızca yönelimin soldan sağa geçtiğini gösterir ve bunu rahatlıkla yok sayabiliriz. Yine, her bir yinelenme için bir ikil vardır. Aynı hile Üçlü Çadır Denklemi için de işe yarar ama onun eği-

mi daha büyüktür –üç– ve her bir yinelenme için de Lyapunov katsayısı -1.58 ikildir [tam değer $\log_2(3)$]. Neden yalnızca "büyütücü unsurlar"dan (Lyapunov sayılarından) söz etmek dururken sürekli logaritmalardan bahsediyoruz? Ve neden baz 2 logaritmalardan söz ediyoruz? Bu kişisel bir tercih ve genellikle de ikili aritmetikle bağlantısı, bilgisayarlarda kullanımı, "her bir yineleme başına 0.693147 nat" demek yerine "her bir yineleme başına bir ikil" demenin daha güvenli olması ve ikiyle çarpmanın insanlar için nispeten kolay olmasından ötürü bu böyle.

Tam Lojistik Denklem grafiği bir parabol ortaya koyar; bu nedenle de farklı aşamalarda büyüme değişmektedir ve bir sabitin ortalamasını alma hilemiz işlemez gibi görünür. Sonsuz geleceğe sınırı nasıl ekleyebiliriz? Fizikçimiz hemen bir bilgisayarı tam gaz çalıştırıp birçok farklı durum için sonlu-zaman Lyapunov katsayılarını hesaplayacaktır. Özellikle de X'in farklı değerleri için iki yinelemedeki geometrik ortalama büyümeyi hesaplayacaktır; sonra üç yinelemeye denk düşen dağılımı, sonra dört yinelemeye... Ve bu böyle sürüp gider. Eğer bu dağılım tek bir değere doğru yakınsarsa, bunu Lyapunov katsayısının bir tahmini olarak kabul etmeyi isteyebilir – bilgisayar artık güvenilmez olacak kadar uzun süre çalıştırılmadıysa tabii. Ortaya çıkan sonuç, bu dağılımın Büyük Sayılar Yasası'nın öngördüğünden daha hızlı yakınsama göstermesidir. Fizikçimiz bu tahminî değerden memnundur – o da her bir yineleme için yaklaşık bir ikildir.

Matematikçimiz, elbette, böyle bir dışdeğer hesabına (extrapolation) girişmeyi hayal bile edemez. O, her biri kesin olmaktan uzak sonlu sayıda sayısal hesaplamay-

la sonsuz geleceğe uzanan kesin bir hesaplama arasında bir benzerlik görmez. Onun bakış açısına göre, α'nın pek çok değerinde Lyapunov katsayısının değeri bilinmez olmayı sürdürür – bugün bile. Ama Tam Lojistik Denklem özeldir ve matematikçilerin ikinci hilesini ortaya koyar: Tam Lojistik Denklemi tanımlayan kuralda X yerine sin θ yerleştirip trigonometriden bazı özdeşlikleri kullanarak, matematikçi, Tam Lojistik Denklem'in *aslında* Kaydırma Denklemi olduğunu gösterebilir. Lyapunov katsayıları bu türden matematiksel el çabukluklarında değişmediği için Lyapunov katsayısının gerçekten de her münferit yineleme için tek bir ikil olduğunu kanıtlayıp Büyük Sayılar Yasası'nı ihlal etmeyi bir dipnotla açıklayabilir.

Daha büyük boyutlu Lyapunov katsayıları

Model durum birden fazla bileşene sahipse, bileşenlerinden birindeki belirsizlik diğer bileşenlerdeki gelecek belirsizliğe katkı sağlayabilir. Bu da yepyeni bir bizi matematik meseleyi gündeme getirir, zira varlıkları bir araya topladığınız düzen önem kazanır. Biz öncelikle farklı bileşenlerdeki belirsizliğin katışmadığı örnekleri dikkate alarak bu karmaşıklıklardan uzak duracağız, ama bunların çok özel durumlar olduklarını unutmamaya da özen göstermeliyiz!

Fırıncı Denklemi'nin, Şekil 21'de gösterildiği gibi, x ve y biçiminde iki bileşeni vardır. İki boyutlu bir kareyi tamı tamına şu kuralla kendi üzerine dönüştürür:

Eğer x bir buçuktan azsa:

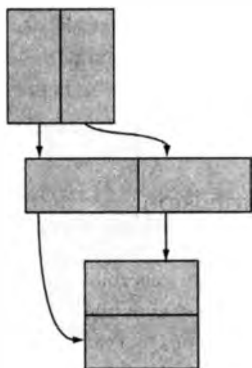
x'i 2'yle çarparak x'in yeni değeri olarak al ve y'yi 2'ye bölerek y'nin yeni değeri olarak al.

Aksi halde:

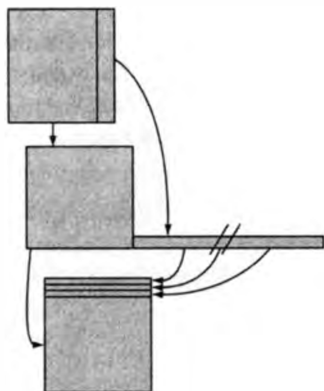
x'i 2'yle çarp ve bir çıkararak x'in yeni değeri olarak al; y'yi ikiye böl ve bir buçuk ekleyerek yeni y olarak al.

Fırıncı Denklemi'nde durumumuzun yatay (x) bileşenindeki her türlü belirsizlik her bir yinelemede katlanacaktır; dikey (y) bileşenindekiler ise yarıya bölünecektir.

Fırıncı Denklemi



Fırıncının Çırağı Denklemi

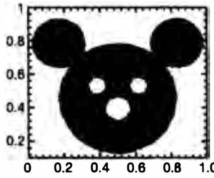


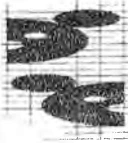
21. Fırıncı Denklemi'nde (solda) ve Fırıncının Çırağı Denklemi'nde (sağda) kare içindeki noktaların nasıl ileri doğru genişlediklerini gösteren bir çizim.

Bu her bir aşamada geçerli olduğuna göre, ortalama olarak da geçerlidir. Ortalama belirsizlik çiftleme zamanı bir yinelemedir ve Fırıncı Denklemi de her bir yineleme için bir ikile eşit bir Lyapunov katsayısına sahiptir ve her bir yineleme için eksi bire denk düşen bir katsayıya.

Pozitif Lyapunov katsayısı büyüyen belirsizliğe denk düşerken olumsuz olanı daralan belirsizliğe denk düşer. Her bir durum için, bu bileşenlerden her biri ile bağlantılı bir yön bulunmaktadır; bu çok özel durumda bu yönler bütün durumlar için aynı ve böylece x içindeki belirsizlikleri asla y içindeki belirsizlikle karıştırmazlar. Fırıncı Denklemi'nin kendisi bir bileşendeki belirsizliğin bir diğer bileşendeki belirsizliğe katkı sağlamasından kaynaklanan zorluklardan kaçınmak için ustalıkla tasarlandı. *Hemen her* iki boyutlu denklemde, elbette, bu tür belirsizlikler işin içine karışmakta ve bu nedenle de biz genellikle hiçbir pozitif Lyapunov katsayısı hesaplayamayız!

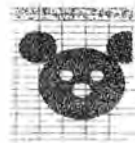
Denklemin birkaç tekrarında, fare şekilli topluluğun gelişimini gösteren Şekil 22'deki sol panellere baktığımız zaman, insanların neden kaosu tahmin etmenin yararsız olduğunu düşündüklerini görebiliriz. Ama bu denklemin özel bir durum olduğunu unutmayın: varsayımsal fırıncımız hamur yoğurma konusunda çok becerikli ve hamuru yatay düzlemde iki çarpan değerinde eşit yayabilmekte; böylece, hamur yeniden birim kareye dönmeden önce yatay düzlemde iki çarpan değerinde daralıyor. Fırıncı Denklemi'ni Fırıncının Çırağı Denklemi'ndeki çeşitli üyelerle karşılaştırmak yararlıdır. Varsayımsal çıraklarımız çok daha az birörnek ve hamurun küçük bir parçasını karenin sağ tarafına biraz daha fazla germekteler; bu arada, Şekil 21'de





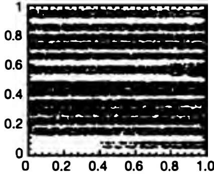


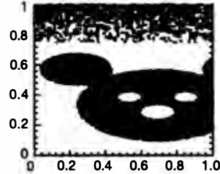












22. Başlangıçtaki durumların fare andırımlı *topluluğu* (üstte) ve bu topluluğun hem Fırıncı Denklemi (sol) hem de dördüncü Fırıncının Çırağı Denklemi (sağ) altındaki gelişimini koşut olarak gösteren dört çerçeve.

görüldüğü gibi, hamurun çoğunu sola yayıyorlar. Neyse ki, çırak ailesinin bütün üyeleri bir bileşendeki belirsizliği bir diğerindekiyle karıştırmayacak kadar becerikli ve bu sayede çiftleme zamanlarını ve üyelerin Lyapunov katsayılarını hesaplayabiliyoruz.

Her bir Çırak Denklemi'nin Fırıncı Denklemi'nden daha büyük bir öncül Lyapunov katsayısı var. Bu nedenle, *eğer* kaos ölçütümüz olarak öncül Lyapunov katsayısını benimsersek, Çırak denklemlerinin her biri Fırıncı Denklemi'nden "daha kaotik"tir. Bu sonuç Fırıncı Denklemi'nin ve ayrıca dört numaralı Çırak'ın nokta kümelerinin gelişimini yan yana gösteren Şekil 22'ye bakıldığında biraz tedirginlik yaratabilir.

Bir Çırak Denklemi'nin ortalama çiftleme zamanı Fırıncı Denklemi'ninkinden çok daha büyük olabilir; oysa, Çırak Denklemi'nin Lyapunov katsayısı da Fırıncı Denklemi'ninkinden daha büyüktür. Bu, eksiksiz bir Çırak Denklemi ailesi için geçerlidir ve ortalama çiftleme zamanı aklınıza gelebilecek her türlü sayıdan daha geniş bir Çırak Denklemi bulabiliriz.

Daralan belirsizlikleri olan pozitif Lyapunov katsayıları

Belirsizlik düşünebildiğimiz en küçük sayıdan daha küçük olduğu sürece tahminlerimize herhangi bir gerçek sınırlama getirmez ve bu belirsizlik ölçülebilir düzeyde büyüdüğü anda da gelişiminin hiçbir biçimde Lyapunov katsayıları tarafından yansıtılması gerekmez. Sonsuz ha-

liyle bile Fırıncı Çırağı denklemleri Lyapunov katsayılarının tahmin edilebilirliğin yanıltıcı göstergeleri olduğunu gösterir, zira belirsizliğin büyüme miktarı dizgenin içinde bulunduğu durumla değişkenlik gösterebilir. Ve daha da iyisi: Lorenz 1963 klasik dizgesinde, bütün belirsizliklerin bir süreliğine *azaldığı* durum uzamı bölgeleri olduğunu kanıtlayabiliriz. Bir tahmin konusunda ne zaman bahse girileceği seçeneği sunulsa, böyle bir bölgeye girerken bahse tutuşmak kazanma şansınızı artıracaktır. Kaotik dizgeleri tahmin etmek yararsız olmaktan çok uzaktır; yararsız olduğuna safça inanan birine karşı bahse girmek kârlı bile olabilir.

Lyapunov katsayıları hakkındaki bu tartışmayı bir uyarıyla bitiriyoruz. Belirsizliğin büyüme ya da daralma göstermediği bir yön sıfır değerli bir Lyapunov katsayısı anlamına gelirse de bunun tersi doğru değildir: sıfır değerli bir Lyapunov katsayısı hiçbir büyümenin olmadığı bir yön anlamına gelmez! Fibonacci'nin tavşanlarına eşlik eden üstel tartışmasını anımsayın: zamanın karesi kadar hızlı bir büyüme bile üstel artıştan daha yavaştır ve sıfır Lyapunov katsayısı ile sonuçlanacaktır. Matematikçilerin sınırları sonsuz geleceğe kadar uzatma konusunda aşırı titiz olmalarının bir nedeni bu: eğer uzun ama sınırlı bir süreyi düşünürsek, *her türlü* büyüme pozitif bir Lyapunov katsayısı gösterecektir – üstel, doğrusal ya da hatta doğrusaldan daha yavaş bir büyüme herhangi bir sınırlı periyotta birden büyük bir büyüme verecektir ve birden büyük herhangi bir sayının algoritması da pozitif olacaktır. Kaos istatistiklerini hesaplamanın kolay olmadığı ortaya çıkacaktır.

İlintili belirsizliklerin dinamiğini anlamak

Yukarıda dile getirdiğimiz gibi, sonsuz haldeki bir belirsizlik tahmin açısından bize fazla zorluk çıkarmaz; ölçülebilir hale geldiği anda tam boyutunun ayrıntıları ve durumun durum uzamının neresinde olduğu belirgin hale gelir. Bugüne kadar matematikçiler gerçek dünyada tahmin yürütmeyle yakından ilgili bu küçük ama dikkat çekici belirsizlikleri izlemek için zarif bir yöntem bulamadı. Yapabileceğimizin en iyisi, küme olarak adlandırılan başlangıç durumlarına bir örnek almak, bu topluluğu hem modelimizin dinamiğiyle hem de gözlemlerimizdeki gürültüyle tutarlı hale getirmek, ardından da topluluğun gelecekte nasıl dağıldığını görmektir. 21. yüzyıl şeytanımız için bu yeterlidir: kusursuz dizge ve gürültü modeli, önceki durumlara ilişkin gürültü yüklü gözlemlerin uzak geçmişe ulaşması ve sonsuz bilgisayar gücü hesaba katıldığında, bu toplam, vuku bulacak olaylara dair olasılığı doğru bir biçimde yansıtacaktır. Eğer üyelerinin dörtte biri yarın yağacak yağmurdan söz ediyorsa, eldeki mevcut gürültü yüklü gözlemler düşünüldüğünde, gerçekten de yarın yüzde 25 yağmur olasılığı vardır. Gürültüyü azaltmak onun neler olacağını belirleme yetisini artırır. Kaos onun için gerçek bir engel oluşturmaz. O şu andan emin değildir ama bu belirsizliği doğru bir biçimde geleceğe dönüştürebilir: insan başka ne ister? Ama bizin modellerimiz kusursuz değil ve hesaplama kaynaklarımız da sınırlı: IX. Bölüm'de 21. yüzyıl şeytanımızın hesaplayabildiği belirsizliği irdelemekteki yetersizliğimize şirk koşacağız.

Doğrusal olmayan dağarcık yalnızca kaostan çok daha fazlasını içerir. Belirsizlik ne kadar küçükse davranışının da o kadar uysal olması her zaman gerekmez. Kaostan beterleri de var: belirsizlik ne kadar küçükse o kadar hızlı büyür ve yalnızca sınırlı bir zaman diliminin ardından sonsuz ölçüde küçük belirsizliklerin tam bir patlamasına yol açar. Bu da göründüğü kadar tuhaf değildir: sıvı dinamiğinin temel denklemlerinin bu kaostan beter bir davranış gösterip göstermediği yanıtlanmamış bir soru olarak duruyor – matematiğin bir milyon dolar ödül iliştirilmiş sorularından biri!

VII. Bölüm

GERÇEK SAYILAR, GERÇEK GÖZLEMLER, BİLGİSAYARLAR

Matematikçi büyük bir titizlikle irrasyonel sayıları tanımlar. Fizikçi böyle sayılarla asla karşılaşmaz. (...) Matematikçi belirsizliğe omuz silker ve deneysel hataları görmezden gelmeye çalışır.

Léon Brillouin (1964)

Bu bölümde, matematiksel modellerimizdeki sayılar, dünyevî ölçümlerden söz ederkenki sayılar ve dijital bir bilgisayarın içinde kullanılan sayılar arasındaki ilişkiyi inceliyoruz. Kaos çalışmaları bu üç tür sayıyı birbirinden ayırt etmenin öneminin açıklığa kavuşmasına yardım etti. Farklı türden sayılarla ne demek istiyoruz?

Tamsayılar bütündür; "bahçemdeki tavşanların sayısı" gibi şeylerin ölçümü doğal olarak birer tamsayı verir ve bilgisayarlar da çok fazla büyümedikleri sürece tamsayılarla kusursuz matematiksel işlemler gerçekleştirebilir. Peki ya "bu masanın uzunluğu" ya da "Heathrow Havaalanı'ndaki

hava sıcaklığı" gibi şeylere ne demeli? Bunların tamsayı olmasının şart olmadığı görülebilir; bunların gerçek sayılar –ondalık belirten noktanın sağında sonsuz uzunlukta bir haneye ya da, başka bir deyişle, sağda ikillere sahip olabilen sayılar– tarafından temsil edildiğini düşünmemiz doğaldır. Bu gerçek sayıların gerçek dünyada var olup olmadıkları tartışması eski çağlara kadar uzanır. Açık olan bir şey varsa, o da "veri alma" işleminde yalnızca tamsayı değerleri "saklama" eğiliminde olduğumuzdur. Eğer "bu masanın uzunluğu"nu ölçer ve sonucu 1.370 olarak yazarsak, bu ölçüm ilk bakışta bir tamsayı olarak görünmez, ama biz onu 1000 ile çarparak bir tamsayıya dönüştürebiliriz; ne zaman ki uzunluk ya da ısı gibi bir niceliği ancak sınırlı bir açıklıkla –ki uygulamada bu hep böyledir– ölçebiliriz, o zaman, ölçümümüz bir tamsayı kullanılarak temsil edilebilir. Ayrıca, aslında, günümüzde ölçümlerimiz hemen her zaman bu biçimde kaydedilmektedir, çünkü bu ölçümleri dijital bilgisayarlar kullanarak kaydetme ve değerlendirme eğilimindeyiz; bilgisayarlar da *her zaman* sayıları tamsayı olarak depolar. Bu da bizim fiziksel uzunluk kavramımız ile uzunluk ölçümlerimiz arasında bir bağlantısızlık olduğunu akla getirir; gerçek sayıları dikkate alan matematiksel modellerimiz ile bunların yalnızca tamsayılara izin veren bilgisayar çıkışlı karşılıkları arasında benzer bir kopukluk vardır.

Elbette, gerçek bir fizikçi masanın uzunluğunun 1.370 olduğunu asla söylemez; gürültü nedeniyle oluşan belirsizliği tanımlamak amacıyla uzunluğun 1.370 ± 0.005 olduğuna benzer bir şey söyler. Bu modelde ön plana çıkan unsur gürültüdür. Kuşkusuz, en çok bilinen gürültü modeli çan şekilli eğrinin raslantısal sayılarıdır. İnsan okulda

fen derslerinden geçebilmek için "± 0.005" gibi şeyleri işin içine katmayı öğreniveriyor; bu genellikle bir baş ağrısı gibi görülse de gerçekte ne anlama gelmektedir? Ölçümlerimizin ölçtüğü şey nedir? Masanın Gerçek uzunluğuna ya da havaalanındaki Gerçek sıcaklığa denk düşen kesin bir sayı var da biz onu kaydettiğimizde gürültü tarafından bozulup budanmakta mı? Yoksa bu sayı yalnızca kurmaca mı ve kesin bir sayı olması gerektiği inancı yalnızca bilimimizin bir uydurması mı? Kaos çalışmaları böylesi Gerçek değerlerin var olup olamayacağını anlamamız için yeni yollar önererek kuramlarımızı değerlendirmede belirsizlik ile gürültünün rolünü açıklığa kavuşturdu. Şimdilik Gerçeğin oralarda bir yerlerde bulunduğunu ve bizim onu açıkça göremediğimizi varsayacağız.

Hiçbir şeyin önemi yok

Şu halde, tam olarak, gözlem nedir? İlk zaman serimizi anımsayın – Fibonacci'nin kurgusal bahçesinde tavşanların beher aylık sayısından oluşmaktaydı. O durumda tavşanların bahçedeki toplam sayısını biliyorduk. Ama nüfus dinamiği alanındaki pek çok çalışmada bu türden eksiksiz bilgiye sahip değiliz. Örneğin, Finlandiya'daki tarla farelerinin sayısını incelediğimizi düşünün. Tuzaklar yerleştirir, bunları her gün kontrol eder, yakalananları salıverir ve yakalanan tarla farelerinin günlük zaman serisinin kaydını tutarız. Bu sayı, bir şekilde, Finlandiya'da kilometrekare başına düşen tarla faresi sayısıyla bağlantılıdır, ama ne kadar kesindir? Diyelim ki, bugün tuzağımızdaki tarla fa-

resi sayısı sıfır. Bu "sıfır" ne anlam taşır? Bu ormanda hiç tarla faresi olmadığı anlamına mı gelir? İskandinavya'da hiç tarla faresi olmadığı anlamına mı gelir? Tarla farelerinin neslinin tükendiği anlamını mı taşır? Tuzağımızdaki sıfır bunlardan herhangi birini karşıladığı gibi hiçbirini de karşılamıyor olabilir ve bu da ölçümlerimizi modellerimizle ilişkilendirirken başa çıkmamız gereken iki tür belirsizliği örnekler. Bunlardan biri, basit gözlemsel gürültüdür: bunun bir örneği tuzaktaki tarla farelerinin sayısını yanlış hesaplamak ya da tuzağı dolu bulmak olabilir – bu da eğer daha hacimli bir tuzak kullanılmış olsaydı o gün daha fazla tarla faresinin sayılabileceği olasılığına açık kapı bırakır. İkincisi, *temsil hatası* (representation error) adını alır: modellerimiz kilometrekaredeki nüfus yoğunluğunu dikkate almakta ama biz bir tuzaktaki tarla farelerinin sayısını ölçüyoruz; bu nedenle, ölçümlerimiz modellerimizin kullandığı değişkeni temsil etmez. Bu, modelin mi yoksa ölçümlerin bir eksikliği mi?

Eğer modelimize yanlış sayı girersek, yanlış sayı çıkmasını bekleyebiliriz: çöp giren çöp çıkar. Ama, görünüşe bakılırsa, modellerimiz tek bir *tür* sayı talep ederken bizim gözlemlerimiz bir başka tür sayının gürültü yüklü bir versiyonunu sunuyor. Hedef değişkenlerimizin –sıcaklık, basınç, nem– gerçek sayılar olduğu düşünülen hava tahmininde gözlemlerimizin gerçek değerleri tam olarak yansıtmasını bekleyemeyiz. Bu da demektir ki, gözlemlerimizin ve model durumlarımızın aşağı yukarı aynı şey olduğunu kabul ederek modelimizin gelecekteki bir durumuyla buna denk düşen hedef gözlem arasındaki mesafeyi ölçmeye çalışmak yerine, gözlemlerimizle *tutarlı* dinamiklere

sahip modeller arayabiliriz. Doğrusal dizgeleri tahmin etmenin hedefi, bu mesafeyi en aza indirgemektir; yani tahmin hatasını. Doğrusal olmayan dizgeleri tahmin ederken bu nicelikle bağlantılı şeyleri –gözlemlerdeki belirsizlikler, ölçümdeki kesiklikler bunlara dâhildir– ve matematiksel modellerimiz arasındaki farkı, onlar için oluşturduğumuz bilgisayar simülasyonlarını ve gerçekte bu verileri yaratan her ne ise onları birbirinden ayırmak önemlidir. Önce, dinamikleri bir bilgisayara girmeye çalıştığımızda neler olduğunu inceleyeceğiz.

Bilgisayarlar ve kaos

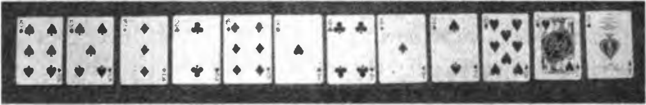
Anımsarsanız, matematiksel kaos için ihtiyaç duyduğumuz üç şey determinizm, duyarlı bağımlılık ve yinelemeydi. Bilgisayar modelleri aşırı derecede deterministtir. Duyarlı bağımlılık sonsuz ölçüde küçük öğelerin dinamiklerini yansıtır ama herhangi bir dijital bilgisayarda iki sayının birbirini yakınsamasının bir sınırı vardır; bu sınırın ötesinde bilgisayarlar hiçbir fark göremez ve sayıları sanki aynı sayıymış gibi ele alır. Sonsuz ölçüde küçük öğeler yoksa matematiksel kaos da yoktur. Bilgisayarların kaosu gösterememesinin ikinci bir nedeni, dijital bir bilgisayarın yalnızca sınırlı miktarda belleğe sahip olması gerçeğinden kaynaklanır: her bir bilgisayarda sınırlı sayıda ikil bulunduğu için farklı içsel durumların sayısı da sınırlıdır; sonunda bilgisayar zaten aştığı bir duruma dönmek zorundadır. Bu noktadan sonra, determinist olduğu için, bilgisayar daireler çizerek çalışacak, önceki davranışını tekrar edecektir.

Bu kaderden kaçınılmaz – eğer ki bir insan ya da başka bir haricî güç dijital bilgisayarın içsel dinamiğine müdahale etmezse. Basit bir iskambil hilesi bu hususu güzel bir biçimde örnekler.

Bu durum Lojistik Denklem'in bilgisayar simülasyonları için ne anlam taşır? Denklemin matematiksel versiyonunda sıfır ile bir arasındaki hemen her X'in yinelenmesinden alınan zaman serileri asla X'in aynı değerini iki kez içermez – ne kadar çok sayıda yinelenmeyi dikkate alırsak alalım. Yinelenme sayısı arttıkça o zamana kadar gözlenen en küçük X değeri sıfıra asla ulaşmadan sıfıra gitgide yaklaşır. Lojistik Denklem'in bilgisayar denkleminde sıfır ile bir arasındaki X için yalnızca yaklaşık 2^{60} (yaklaşık bir milyon kere milyon kere milyon) farklı değer bulunmaktadır ve bu nedenle de bilgisayardaki zaman serisi en sonunda birbirinin tamamen aynı olan iki X değerini içerecek ve sonsuz bir döngüye takılıp kalacaktır. Bu gerçekleştikten sonra X'in en küçük değeri asla yeniden azalmayacak ve bu döngü esnasında yapılacak her türlü hesaplama –bu ister X'in ortalama değeri, ister denklemin Lyapunov katsayısı olsun– matematiksel denklemin değil, bu döngünün niteliklerini yansıtacaktır. Bilgisayar yörüngesi, matematiksel dizge başka ne yapabilecek olursa olsun, *dijital anlamda periyodik* hale gelmiştir. Ve bu bütün dijital bilgisayarlar için geçerlidir. Bilgisayarlar kaos yaratamaz.

Dijital anlamda periyodik döngünün sayısı birden fazla olabilir: bir deste iskambil kâğıdını karıştırıp bazılarını büyük bir daire oluşturacak biçimde yerleştirin – ilk kart dağıtılan en son kartın ardından gelecek biçimde. Her bir kartın hangi döngüde sona geleceğini belirlemek tüm dön-

gülerin listesini verir. Hangisi daha büyüktür? Döngülerde deveran eden kartların sayısı mı yoksa geçiş konumunda olanlarınki mi? Kartları yeniden karıştırıp deneyi yineleyin ve dağıtılan kart sayısına göre döngü sayısının ve döngülerin uzunluğunun değiştiğini görün. Aynı şekilde, bir



23. "Bilgisayarlar kaos yaratamaz" adlı kart oyununu üretmenin iki yolu; eğer iskambil destesi yeterince büyükse, öyle bir zaman gelir ki, herkes –üst paneldeki gibi bir hat halinde sıralandıklarında bile– kendisini aynı kart üzerinde bulur.

Kart hileleri ve bilgisayar programları

Bir arkadaşınızdan, diyelim ki, 1 ile 8 arasında bir sayı seçmesini –ve seçtiği sayıyı söylememesini– isteyin; ardından bir deste kağıdı Şekil 23'te gösterildiği biçimde dağıtın. Üzerinde yüz olan kartları on, ası da bir kabul ederek, arkadaşınızdan tuttuğu sayı kadar sayıp karşısına çıkan kağıdı yeni sayı olarak almasını isteyin. Eğer tuttuğu sayı bir ise maça altılısında kalır ve bu yeni sayıyla da altı kart ilerleyince sinek dörtlüsüne gider; eğer ilk tuttuğu sayı üçse karo üçlüsüne gider, ardından kupa asına, vb. Şekil 23'ü kendi başınıza deneyin ve kupa valesine geldiğinizde durun. Kupa valesine geleceğinizi nasıl bildim? Bilgisayarların kaos yaratamamaları ile aynı nedenden ötürü. Herkes kupa valesine gelir.

Bunun bilgisayarlarla ne ilgisi var? Dijital bir bilgisayar sonlu bir durum makinesidir: içinde mevcut durumunu tanımlayan sınırlı sayıda ikil bulunur. Makinenin mevcut durumuna kodlanmış halde de hangi durumun bir sonraki olacağını belirleyen kural yer alır. İskambil oyununda her bir konumda on olası değer bulunmaktaydı. Eğer iki farklı kart üzerindeki oyuncular ileri doğru hareketlerinde aynı kartta buluşursa, o noktadan sonra kartları birbirinin aynıdır; tam anlamıyla dikkat kesilmezseniz, bir bilgisayardaki birbirine yakın durumlar da aynı biçimde tek durumda birleşecektir. Modern bir bilgisayarın çok daha fazla seçeneği olabilir, ama bunlar da sonlu sayıdadır ve eninde sonunda bilgisayar daha önce aştığı bir kon-

figürasyon (bir içsel durum) ile karşılaşır; bu noktadan sonra da sonsuza kadar aynı döngü içinde dönüp durur. Kart hilesi de buna benzer biçimde işler: herkes kendi tuttuğu sayıyla başlar, sayısını yenileyerek ilerler. Ama bu yollardan ikisi aynı kart üzerinde birleştiği anda, artık sonsuza kadar tek bir yol kalır. Masadaki kartlar söz konusuysa, herkes kupa valesine gelecektir; hiç kimse –eğer başlangıç noktaları değilse– maça asına varmayacaktır. Bunu görmek için her bir değerle başlamayı deneyin. Bir sayısını seçerseniz sırasıyla altı, dört, vale; ikiyi seçerseniz beş, dört, vale; üçü seçerseniz üç, as, dört, vale. Dördü seçerseniz iki, as, dört, vale; beşi seçerseniz altı, vale; altıyı seçerseniz as, dört, vale; yediyi seçerseniz dört, vale; sekizi seçerseniz as, iki, vale. Bütün değerler valeye çıkar. Kartları bir daire biçiminde yerleştirirseniz her bir başlangıç noktasının periyodik bir döngüye çıkacağı sonlu bir durum makinemiz var demektir – ama birden fazla döngü olabilir.

Kartları bir ekrana yansıtarak bu gösteriyi çok sayıda izleyiciyle gerçekleştirebilirsiniz. Kendiniz bir sayı seçin, herkesin aynı noktada buluştuğuna inanana kadar kartları dağıtın, ardından da kupa valesine gelenlerin ellerini kaldırmalarını isteyin. Herkes aynı kartta olduğunun farkına varınca yüzlerinde şahane bir şaşkınlık ifadesi belirir. Eğer destedeki kartları daha küçük sayılarla sınırlandırırsanız, herkesin aynı noktaya gelmesi daha çabuk mümkün olur. Desteyi herkes daha çabuk aynı noktaya gelsin diye düzenleyecekseniz, kartları hangi sıralamada yerleştirirsiniz?

bilgisayarın X'in her bir değeri için kullandığı ikillerinin sayısını yapay olarak değiştirmek onu denklemin dijital anlamda incecik yapısını incelemek için –kutuların tek tek sayılamayacak kadar çok oldukları ortamda uzunluk ölçümlerini incelemek için bilgisayar dinamiğini kullanan– matematiksel bir mikroskoba dönüştürür.

Gerçekliğin gölgeleri

> Gerçeklik, ona inanmayı bıraktığınızda çekip gitmeyen şeydir.
>
> P. K. Dick

Felsefecimizle fizikçimiz bu sonuçları rahatsız edici bulmaktadır. Eğer bilgisayarlarımız matematiksel modellerimizi yansıtamıyorsa, matematiksel modellerimizin gerçekliği yansıttığına nasıl hükmederiz? Eğer bilgisayarlarımız Lojistik Denklem gibi basit bir matematiksel dizgeyi gerçekleştiremiyorsa, çok daha karmaşık hava ve iklim modellerimizin ardındaki kuramı nasıl değerlendirebiliriz? Ya da matematiksel modelleri gerçeklikle nasıl karşılaştırırız? Model yetersizliği konusu, başlangıç şartı bağlamındaki belirsizlikten daha derindir.

Model yetersizliğini sınamanın bir yolu, zaten sahip olduğumuz gözlemleri alıp modelimizin bu gözlemlere yakın bir zaman serisi üretip üretemeyeceğini sorgulamaktır. Eğer model kusursuzsa, ele alacağımız gözlemlerin herhangi bir özelliğini gölgeleyen en az bir başlangıç durumu olacaktır – burada *gölgeleme* (shadowing) ile modelin zaman

serisi ve gözlenen zaman serisi arasındaki fark(lar)ın gürültü modelimizle tutarlı olması kastedilmekte. Bu da gürültü modelimize geçmişte sahip olduğundan çok daha yüksek bir statü kazandırır. Modelimiz kusursuz olmadığında da gölgeler olmasını bekleyebilir miyiz? Hayır, uzun vadede böyle olmaz, modelimiz kaotikse tabii; hiçbir gölgeleyici yörüngenin var olmadığını kanıtlayabiliriz. Gürültü çekip gitmeyecektir; ona inanmayı bıraktığınızda bile. Kusursuz olmayan kaotik modellerde gürültünün modellerimiz ile gözlemler arasındaki farkın tutarlı bir hesaplamasına izin vermesini sağlayamayız. Model hatası ile gözlemsel gürültü ayrılamaz biçimde karışmıştır. Ve eğer gözlemler, model durumlar ve gerçek sayılar gerçekte farklı türden sayılarsa –tıpkı kuyruksuz maymunlarla orangutanlar gibi– birini diğerinden çıkarmaya çalıştığımızda ne yaptığımızı biliyor muyduk? Bu sorunun izinden gitmek için önce kaos istatistiği hakkında daha çok şey öğrenmeliyiz.

VIII. Bölüm

KUSURA BAKMAYIN, YANLIŞ NUMARA: İSTATİSTİK VE KAOS

Henüz elimde bir veri yok ve insanın elinde veri olmadan kuramlar üretmesi büyük bir hata.

(A. C. Doyle'un *A Scandal in Bohemia* adlı eserinde Sherlock Holmes'un Watson'a söylediklerinden)

Kaos, istatistiksel tahminin karşısına yeni zorluklar çıkarır, ama bunların istatistikçilerin yüzyıllardır karşılaştıkları zorluklar bağlamında görülmesi gerekmez. Zaman serilerini modellerimizin kendileri yoluyla analiz ederken istatistiksel bilgilerden ve istatistiğin iyi uygulamalarının temel kurallarından derlenecek çok şey var. Fakat fizikçimiz kaotik modelleri gerçek dünyadaki gözlemleriyle karşılaştırırken tam da "elmalarla portakalları topluyor" ve bu da istatistiğin rolünü daha az bildik bir bağlama yönlendiriyor. Kaotik dizgelerin incelenmesi durumun ne kadar bulanık olduğunu açıklığa kavuşturdu. Gürültülü gözlemlerle bir dizgenin mevcut durumunun nasıl tahmin

edileceği konusunda bile görüş ayrılığı mevcut; bu da daha tahminde bulunmaya başlamadan tahminden bizi vazgeçirme tehdidini beraberinde getiriyor. Bu alandaki gelişmeler yarının havasını tahmin etme yeteneğimiz ile 50 yıl önceden iklim değişikliğini etkileme yeteneğimiz gibi tamamen apayrı konularda verim sağlayabilir.

Sınırların istatistikleri ve istatistiklerin sınırları

Belirli bir istatistiği, örneğin bütün insanların ortalama boyunu tahmin etmeyi ele alalım. "Bütün insanlar" topluluğunun tanımı konusunda birtakım görüş ayrılıkları olabilir (1 Ocak 2000'de hayatta olanlar mı, bugün hayatta olanlar mı, şimdiye kadar yaşamış olanların tamamı mı...?) ama bunun bizim dikkatimizi dağıtmaması gerekir. Bu topluluğun her bir üyesinin boyuna ilişkin çok iyi tanımlanmış değerlerin var olduğunu varsaysak bile, bunun değerinin ne olduğunu bilmiyoruz. İnsanlar örnekleminden alınmış ortalama boya örnek-ortalama adı verilir. Bütün istatistikçiler bu değer konusunda hemfikirdir – bu sayının nüfusun tamamı açısından hedeflenen ortalama değeri konusunda hemfikir olmasalar da. (Tamam, düzeltelim: istatistikçilerin tamama yakını hemfikirdir.) Aynısı, örnek-Lyapunov katsayıları için geçerli değildir. Kaosun örnek-katsayılarının herhangi mantıksal bir yoldan birörnek bir biçimde tanımlanabilecekleri konusu da açık değildir.

Bunun çeşitli nedenleri var. Birincisi, fraktal boyutlar ve Lyapunov katsayıları gibi kaos istatistiklerini hesaplamak,

sınırları sonsuz ölçüde uzun süreler dâhilinde yok denecek ölçüde küçük uzunluklara çekmeyi gerektirir. Bu sınırlar gözlemlere dayanılarak asla çekilemez. İkincisi, kaos incelemeleri verilerden, nasıl inşa edileceklerini tam olarak belirtmeye gerek kalmadan modeller oluşturmanın yeni yollarını sağladı. Aynı verilere sahip farklı istatistikçilerin oldukça farklı *örnek-istatistikler* elde edebilmesi gerçeği kaos istatistiğini örnek-ortalamadan oldukça farklı kılar.

Kaos "iyi" kabul edileni değiştirir

Birçok model "serbest" parametreler içerir; yani, ışık hızı ya da suyun donma noktasının aksine, tam bir doğrulukla bilemediğimiz parametreler. O zaman, parametreye modelimizde verilebilecek en iyi değer nedir? Ve eğer modelin amacı tahminler yapmaksa, başka bir parametre değeri daha iyi tahminler sağlamışken laboratuvardan ya da temel bir kuramdan gelen bir değeri kullanmak niye? Kaotik dizgelerin modelini oluşturmak bizleri "daha iyi" kavramını bile yeniden değerlendirmeye, hatta yeniden tanımlamaya zorladı.

Kusursuz Model Senaryosu'nun zayıf versiyonunda modelimiz verileri üreten dizgeyle aynı matematiksel yapıya sahiptir, ama Gerçek parametre değerlerini bilmeyiz. Diyelim ki, verilerin Lojistik Denklem tarafından üretildiğini biliyor, α'nın değerini bilmiyoruz. Bu durumda, oldukça iyi tanımlanmış bir "daha iyi" söz konusudur: yani, veriyi üreten parametre değeri. Gözlemsel belirsizlik açısından kusursuz bir gürültü modeli düşünüldüğünde, geçmişin

gürültülü gözlemlerini dikkate alarak yarın kullanmak için *en iyi* parametre değerlerini nasıl çıkarırız?

Eğer model doğrusalsa, o zaman, birkaç yüzyıllık deneyim ve kuram bize en iyi parametrelerin kestirimlerinin hedeflerine en yakın konumlananlar olduğunu göstermekte. Modelimizi yeni gözlemler üzerinde kullanmak istiyorsak, modelimizi aşırı düzeyde uyarlamamaya özen göstermeliyiz, ama bu zaten istatistikçimiz tarafından iyi bilinen bir konudur. Bu model doğrusal olduğu ve gözlemsel gürültü de çan şekilli dağılımdan geldiği sürece, tahmin ile hedef arasındaki mesafeyi en aza indirmek gibi bir hedefimiz var demektir. Mesafe her zaman en az sayıdaki kare bağlamında tanımlanır: durumun her bir bileşenindeki karelerin toplanmasına dayanır. Veri seti büyüdükçe tahmin ettiğimiz parametre değerleri verileri üretmiş olanlara gitgide yaklaşacaktır – elbette, doğrusal modelimizin gerçekten de verileri ürettiğini varsayarsak. Peki ya modelimiz doğrusal değilse?

Doğrusal olmaması durumunda, yüzyıllara dayanan sezgimiz bir engel olmasa da yanıltıcıdır. En az sayıdaki kareler bizleri doğru parametre değerlerinden uzaklaştırabilir. Bu basit gerçeğe tepki verememenin bilimsel modellendirme üzerindeki olumsuz etkisini küçümsemek olanaksız. İşlerin ters gidebileceği konusunda pek çok uyarıda bulunulduysa da, herhangi bir açık ve mevcut tehlikenin eksikliği –ve bunların kullanım kolaylığı– karşısında böyle yöntemler doğrusal olmayan dizgelerde düzenli bir biçimde (hatalı) kullanıldı. Kaosu tahmin etmek bu tehlikeyi açığa çıkarır: diyelim ki, elimizde Lojistik Denklem'den alınan gürültülü gözlemler var ve $\alpha = 4$ (biz bunu bilmiyoruz); sonsuz bir veri setiyle bile en az sayıda kareler yak-

laşımı α için çok küçük kalacak bir değer verir. Burada sorun, çok az veri ya da çok az bilgisayar gücü olması değil: doğrusal dizgeler için geliştirilmiş yöntemler doğrusal olmayan sorunlara uygulandıklarında yanlış yanıt üretir. İstatistiğin temel dayanağı, doğrusal olmayan modellerin parametrelerini tahmin ederken önemini yitirir. Bu, matematiksel ayrıntıları göz ardı edip en iyinin gerçekleşmesini umut etmenin felakete yol açacağı bir durumdur: en az sayıda kutular varsayımının matematiksel gerekçesi, belirsizlik için çan şekilli dağılımları hem başlangıç durumunda hem de tahminlerde varsayar. Doğrusal modellerde başlangıç şartındaki belirsizlik çerçevesinde gerçekleşen çan şekilli bir dağılım, tahminlerdeki belirsizlik için çan şekilli dağılımla sonuçlanır. Doğrusal olmayan modellerde bu söz konusu değildir.

Bu etki önemli olduğu ölçüde göz ardı edilmektedir. Bugün bile doğrusal olmayan modellerde tutarlı ve uygulanabilir bir parametre kestiriminden yoksunuz. Bu gerçeği acı da olsa kesin kılan kaos çalışmaları oldu. Yakın zamanlarda, Batı Avustralya Üniversitesi'nde uygulamalı matematikçi olan Kevin Judd, hem en az kareler prensibinin hem de gözlemler konusunda maksimum olabilirlik görüşünün doğrusal olmayan dizgelerde güvenilmez birer rehber olduklarını ileri sürdü. Bu, sorunun çözümsüz olduğu anlamını taşımaz: 21. yüzyıl şeytanımız α'yı çok doğru tahmin edebilir, ama bunu yaparken en az kutular yaklaşımını kullanmayacaktır. Gölgelerle çalışacaktır. Modern istatistik doğrusal olmayan kestirimin zorluklarına karşı çıkmaya başlıyor, en azından modellerimizin matematiksel yapısının doğru olduğu durumlarda.

Yalanlar, kötü yalanlar, boyut tahminleri*

Genç bir öğrenci heveslendi bir keresinde,
fraktal boyutu ölçmeye.
Ama veri noktaları serbest değil,
ve, D üzeri 42 gerekince,
Koyuldu görsel incelemeye.

(James Thieler'dan esinlenerek)

Mark Twain muhtemelen fraktallardan hoşlanırdı, ama hiç kuşkusuz boyut tahminlerinden nefret ederdi. 1983'te, Peter Grassberger ve Itamar Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Actors" başlığını taşıyan ve bugüne kadar binlerce bilimsel makalenin referans saydığı bir makale yayınladı. Birçok makale birkaç referansa konu olur. Referansa konu olan bölümleri kullanıp kaos çalışmalarından edinilen fikirlerin fizikten uygulamalı matematiğe kadar bütün bilimsel türlere nasıl yayıldığını incelemek ilginç olacaktır.

Makale bir kaotik dizge için iyi bir modelin gerektireceği bileşenlerin sayısını bir zaman serisi yoluyla tahmin etmek için çok basit bir işlem sağlar. İşlem çok iyi işaretlenmiş pek çok gizli tuzak da içeriyordu. Yine de, gerçek verilerin kullanıldığı uygulamaların tamamı olmasa da çoğunluğu bu tuzaklardan birinde olmazsa diğerinde mevcuttur. Boyutun matematiksel açıdan sağlamlığı, onu elde etmeyi böylesine

* Yazılı ortamda ilk kez Mark Twain tarafından kullanılmış olsa da, Charles Wentworth Dilke'ye atfedilen söz: "Üç tür yalan vardır: yalanlar, kötü yalanlar, istatistik." (ç.n.)

önemli kılan şeydir: bir nesneyi alıp onu gerebilir, katlayabilir, kıvırabilir, hatta bir çok küçük parçaya ayırabilir, sonra da bu parçaları dilediğiniz biçimde bir araya getirebilirsiniz; ama boyutunu değiştiremezsiniz. Büyük veri setlerinin anlamlı sonuçlar için başarı şansına sahip olmasını bu dirençlilik etkiler. Ne yazık ki, işlem sahte pozitiflere doğru yöneldi ve düşük bir boyutu ölçerek kaosu bulmak modaydı. Talihsiz bir bileşim. Düşük boyutlu dinamik ile kaosu tanımlamaya duyulan ilgi, denklemlerin neler olduğunu bilmeye gerek kalmadan kaosun tahmin edilebileceğini ileri süren matematiksel bir önermeyle tetiklendi.

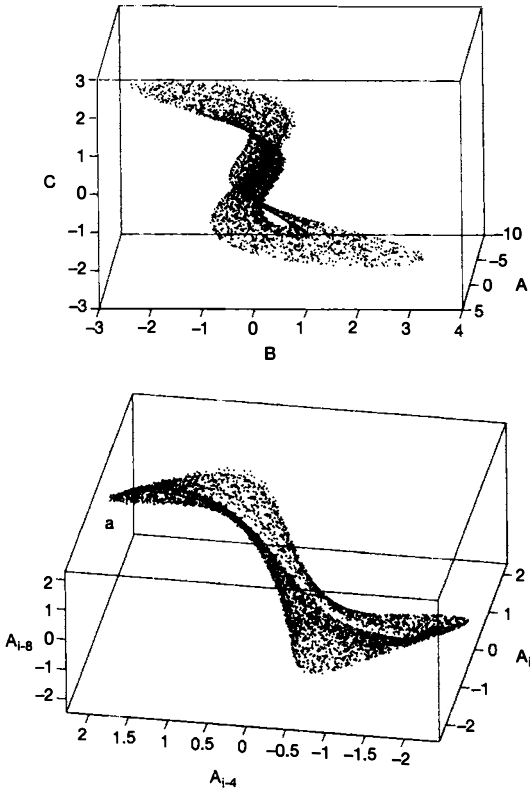
Takens Önermesi ve embedoloji (embedology)

California'da, Packard ve Farmer öncülüğündeki fizikçilerin fikirlerine Hollandalı matematikçi Takens'in temel kazandırmasıyla birlikte zaman serisi analizi seksenli yıllarda yeniden şekillendirildi; bu temelle birlikte bir zaman serisinden analiz ve tahmin için yeni yöntemler çabucak türeyiverdi. Takens Önermesi'ne göre, boyutun durum uzamında gelişen determinist bir dizgenin gözlemlerini alırsak, bazı çok esnek sınırlandırmalar dâhilinde, gecikme uzamın içindeki *hemen her* münferit ölçüm işlevi (gözlem) tarafından tanımlanmış neredeyse tıpatıp bir dinamik model olacaktır. Diyelim ki, özgün dizgenin durumunun *a*, *b* ve *c* olarak üç bileşeni var; önermeye göre, bu üç bileşenden herhangi birine ilişkin gözlemlerin bir zaman serisi yoluyla dizgenin tamamına ilişkin bir model inşa edilebilir;

bu, Şekil 24'te gerçek gözlemlerle örneklenmektedir. Bileşenlerden birini –örneğin *a*'yı– alıp bileşenleri *a*'nın şu anki ve geçmişteki değerlerinden oluşan bir yöney oluşturmak, özgün dizgeyle birebir bir modelin bulunabileceği bir *gecikme-yeniden yapılanma* durum uzamına denk bir modelle sonuçlanır. "Hemen her" kısıtlamaya gözlemler arasındaki özellikle kötü bir zaman periyodunu seçmekten kaçınmak üzere gerek duyulur. Bir karşılaştırma sağlamak gerekirse: eğer havayı yalnızca öğle saatlerinde gözlemlediyseniz, gece neler olduğu konusunda hiçbir fikriniz olmaz.

Takens Önermesi, tahmin sorununu zaman içinde kestirimden durum uzamı içinde kestirime dönüştürür. Kendi verilerinin sonuna ulaşmış ve bilinmeyen bir geleceğe ilişkin tahminlerde bulunmaya çalışan geleneksel istatistikçinin karşısında, Takens Önermesi, fizikçimizi önceki gözlemler arasına girmeye çalışan gecikme-içkinleme temelli bir durum uzamına yerleştirir. Bu bilgiler yalnızca veriye dayalı modellerden çok daha fazlasını etkiler; daha düşük boyutlu bir çekici üzerinde gelişen karmaşık çok boyutlu benzetim modelleri de çok düşük boyutlu, veriye dayalı modeller tarafından modellenebilir. Prensipte, bu daha düşük boyutlu uzamdaki denklemleri de kaynaştırabiliriz; ama uygulamada modellerimizi daha yüksek boyutlu uzamlarda fiziksel simülasyonlar olarak oluştururuz. Bazen daha düşük boyutlu dinamiklerin ortaya çıktığını kanıtlayabiliriz, ama uygun konumdaki daha düşük boyutlu uzamlarda denklemleri nasıl oluşturacağımız hakkında hiçbir fikrimiz yok.

Şekil 24 ile Şekil 14 karşılaştırıldığında devreye ilişkin gözlemlerin Moore-Spiegel çekicilerine "benzediği" açık hale gelir; ama bu benzerlik gerçekte ne kadar derinlere



24. Takens Önermesi'nin Moore-Spiegel Dizgesi'nin zaman serilerini andıran zaman serileri üretmek üzere titizlikle tasarlanmış, Machet'nin elektrik devresinden alınan verilere uygun olabileceğini düşündüren bir çizimi. Alt paneldeki bir ölçümün gecikme-yeniden yapılanması, eşzamanlı üç farklı ölçümün değerlerini kullanan üstteki panelin dağılımıyla bazı benzerlikler taşımakta. Bunu Şekil 14'ün alt paneliyle karşılaştırın.

uzanmaktadır? Bütün fiziksel dizgeler birbirinden farklıdır. Genellikle, elimizde çok az veri ve çok az kavrayış bulunduğunda, istatistiksel modeller tahmin için değerli bir başlangıç noktası oluşturur. Daha fazlasını öğrendikçe ve daha fazla veri topladıkça, simülasyon modelleri çoğunlukla gözlemlerin zaman serilerine "benzer" davranış sergiler ve modellerimiz karmaşıklaştıkça da bu benzerlik daha nicel bir hal alır. Geniş bir gözlem süresine sahip olduğumuz bu devre gibi ender durumlarda, sanki veriye dayalı modellerimiz –bunlara Takens Önermesi tarafından önerilenler de dâhildir– çoğunlukla en iyi nicel eşleşmeyi sağlamaktadır. Sanki simülasyon modellerimiz bir tür kusursuz devre ya da gezegeni modellerken veri temelli modellerimiz tablo üzerindeki devreyi daha yakından yansıtmaktadır. Her iki durumda da elimizde yalnızca benzerlik var; ister istatistiksel modelleri, ister simülasyon modellerini, ister gecikme-yeniden yapılanma modellerini kullanalım, fiziksel dizgenin herhangi bir model denklemi tarafından nasıl betimlendiği açık değil. Bu durum, en iyi, modellerimizin kaotik nitelik taşıdığı fiziksel dizgelerde tekrar tekrar görülür; bunları görgül anlamda uyumlu kılmak istesek de onları nasıl geliştireceğimizden çoğunlukla emin değiliz. Ve Dünya atmosferi gibi dizgeler söz konusu olduğunda da gerekli gözlem süresini tamamlamayı bekleyemeyiz. Kaos çalışmaları bu üç modelleme yaklaşımının sentezini işaret etse de, henüz herhangi bir sentezleme gerçekleştirilemedi.

Takens Önermesi'nin oldukça yaygın kimi yanlış yorumları bulunmaktadır. Bunlardan biri şudur: eğer elinizde eşzamanlı birkaç gözlem varsa, bunlardan yalnızca *birini*

kullanmalısınız; Takens bunların hepsini kullanmamıza izin verir! Bir ikincisi de, Takens'in bize yalnızca, eğer elimizde daha düşük boyutlu determinist bir dinamik varsa bunun özelliklerinin çoğunun bir gecikme-yeniden yapılanma içinde korunduğunu anlattığının unutulmasıdır. Bu "koşullu" savı ters çevirmeme ve bir gecikme-yeniden yapılanmada belirli özellikler görmenin kaosu işaret etmesinin gerektiğini varsaymama konusunda dikkatli olmalıyız, zira gözlemlediğimiz dizgenin Gerçek matematiksel yapısını ender olarak –belki de sıfır düzeyde– bilmekteyiz.

Takens Önermesi bize *hemen her* ölçümün işe yarayacağını söyler. Bu, matematikçimizin işlev uzamındaki "hemen her"in gerçek dünyanın laboratuvarlarında "tek bir tane bile değil"e denk düştüğü bir durumdur. Sonlu sayıda ikillere indirgeme, kuramın bir varsayımını çiğnemektedir. Ayrıca, bir de ölçümlerimizdeki gözlemsel gürültü konusu var. Bir ölçüde, bunların tamamı teknik şikâyetlerdir; bir gecikme-yeniden yapılanma modeli yine de var olabilir ve matematikçimiz ile istatistikçimiz veri akışı üzerindeki gerçekçi sınırlandırmalar karşısında onu yaklaşık olarak tahmin etme zorluğuna direnebilir. Bir diğer sorunla başa çıkmak ise daha zor: gözlemlerimizin süresinin tipik yinelenme zamanını aşması gerekir. Gereken sürenin yalnızca bizim mevcut verilerimizden değil, aynı zamanda dizgenin kendisinin yaşam süresinden daha uzun olması söz konusu olabilir. Bu, felsefî anlamlar da taşıyan temel bir kısıtlamadır. Birbirine çok benzedikleri için aralarında bir fark bulamayacağımız hava koşullarının gerçekleşeceği iki günle karşılaşabilmek üzere ne kadar beklememiz gerekir? Yani, Dünya atmosferinin ilintili durumları arasındaki

farkın gözlemsel belirsizlik dâhilinde yaşanacağı iki gün? Yaklaşık 10^{30} yıl. Bu hiç de teknik bir kısıtlama sayılmaz: bu zaman süresinde Güneş bir kırmızı dev biçiminde büyümüş ve Dünya'yı buharlaştırmış ve hatta Evren de Büyük Çatırtı ile çökmüş olabilir. Dizgenin yaşam süresini aşan gözlem süreleri gerektirdiği bir önermenin taşıdığı anlamlar üzerinde düşünmeyi felsefecimize bırakalım.

Bir dizi rulet oyunu gibi başka dizgelerde benzer durumların gözlenmesi arasındaki zaman çok daha kısa olabilir. Veri akışlarından boyutlar çıkarma çabasının yerini yavaş yavaş veri akışlarından modeller inşa etme çabaları almaktadır. Doğru bir boyut tahmini yapmaktansa iyi bir model inşa etmenin daima daha az zaman alacağı varsayımında bulunulur. Bu da dikkatleri tahmin istatistikleri yerine dinamiklere çevirmenin daha kârlı olabileceğinin bir diğer göstergesidir. Her ne olursa olsun, bu yepyeni veri temelli modelleri oluşturma heyecanı pek çok fizikçiyi şu ana kadar istatistikçinin tekelinde kalmış alanlara yönlendirdi. Kotarılmasını izleyen çeyrek yüzyıl içinde Takens Önermesi'nin bir temel etkisi, istatistikçilerin dinamik dizgeleri modelleme yaklaşımını fizikçilerinkiyle kaynaştırmak oldu. Her şey hâlâ evrimleşmekte ve bu ikisinin gerçek sentezi zaman içinde ortaya çıkabilir.

İkame veriler

Doğrusal olmayan dizgelerde istatistiksel bir tahmini ele almanın zorluğu, "*ikame veriler*" (surrogate data) kullanan yepyeni ve önemli istatistiksel testleri gündeme

getirdi. Bilim insanları ikame verileri en sevdikleri kuramlardan uzaklaşma ve en değerli sonuçlarını hiçe sayma çabasında kullanmaktadır. Bir sonucu nihayetlendirmeyi başaramayan her test onu daha güçlü kılmazsa da, bir sonucun sınırlılıklarını öğrenmek her zaman iyidir.

İkame veri testleri, gözlenmiş verilere benzeyen ama bilinen bir dinamik dizgeden gelen zaman serileri üretmeyi amaçlar. Burada temel unsur, bu dizgenin insanın karşılaşmayı umduğu özelliğe sahip *olmadığının* bilinmesidir: aynı analizi gözlenmiş verilere ve ardından da birçok ikame veri setine uygulamak ümit verici görünse de, aslında böyle olmayan (bunlara sahte pozitifler denir) sonuçları söküp atabilir miyiz? Daha en başta, ikame verilerin yalnızca sahte pozitifler gösterebileceğini biliriz; bu nedenle, gözlenmiş veri seti ikame unsurlardan kolaylıkla ayırt edilemezse analizin birkaç uygulanabilir anlamı var demektir. Bunun uygulamada anlamı nedir? Diyelim ki, "kaosu bulgulama" umudu taşıyoruz ve tahmini Lyapunov katsayımız da 0.5 çıktı: bu değer sıfırdan hatırı sayılır ölçüde yüksek midir? Eğer öyleyse, kaos için gerekli koşullardan biri elimizde demektir.

Elbette, 0.5 sıfırdan büyüktür. Yanıtlamak istediğimiz soru şu: tahmin edilmiş bir katsayıdaki raslantısal dalgalanmaların (i) birbirine benzer görünen zaman serileri üreten ve (ii) gerçek katsayısı aslında sıfırdan büyük olmayan bir dizgede 0.5 kadar büyük olması olası mıdır? Bir ikame zaman serisi üretebilir ve bu ikame seri için katsayıyı tahmin edebiliriz. Hatta, 1000 farklı ikame seri üretip 1000 farklı katsayı da elde edebiliriz. Ardından, eğer ikame serilerden alınan 1000 tahminin neredeyse tamamı 0.5 değerinden çok daha düşükse sonucumuzdan memnun olabiliriz; ama

eğer ikame verinin analizi genellikle 0.5'ten daha büyük katsayılar verirse, gerçek verilerin analizinin sıfırdan daha büyük bir Lyapunov katsayısı için kanıt sağladığını ileri sürmek zordur.

Uygulamalı istatistik

Başı sıkışınca, insan muhakkak ki vidayı çekiçle çakabilir. Kaotik dizgelerin analizi için tarlanmış istatistiksel gereçler kaotik olmayan dizgelerden elde edilmiş gözlemlere yepyeni ve yararlı bir yoldan bakmayı sağlayabilir. Verilerin kaotik bir dizgeden gelmemesi böyle bir istatistiksel analizin değerli bir bilgi içermediği anlamına gelmez. Birçok zaman serisinin analizi –özellikle tıpta, çevrebilimde ve sosyal bilimlerde– bu kategoriye ait olabilir ve yararlı bilgiler sağlayabilir – geleneksel istatistiksel analizle elde edilemeyen bilgiler. İstatistiğin iyi uygulamaları yalnızca temenniler vasıtasıyla yoldan sapmayı önler ve öğrenilenler de uygulamada değerli olabilir – veri akışının kaotik gereksinimlerini karşılasın ya da karşılamasın.

Gürültülü gözlemlerden oluşan bir toplamı ilk modeldurumlar topluluğuna dönüştürme işlemine Veri Özümsemesi denir. KMS'de yaklaşabileceğimiz bir Gerçek durum bulunmaktadır ve gürültü modelinde –yalnızca 21. yüzyıl şeytanımızın erişebileceği türden de olsa– yaklaşmayı amaçlayabileceğimiz kusursuz bir küme yer alır. Ama bütün gerçek tahmin görevlerinde matematiksel dizgeler ya da bilgisayar simülasyonları kullanarak gerçek fiziksel dizgeleri tahmine çalışıyoruz. Kusursuz model varsayı-

mı asla doğrulanmaz ve hemen her zaman da yanlıştır. Öyleyse, veri özümsemesinin hedefi nedir? Bu durumda, sorun yalnızca gerçekliğe denk düşen modelimizin durumunu tahmin ederken "yanlış numara"ya düşmemiz değil, tanımlayacak "doğru bir numara"nın olmayışı. Model yetersizliği, görünüşe bakılırsa, olabilirlik tahminlerini bile bizim ulaşamayacağımız noktalara taşır. Kusursuz olmayan modellerle kaotik dizgeleri tahmin etme çabaları kusursuz olmayan modellerimizin sergilediği çeşitliliğin nasıl kullanılabileceğini araştırmak için yepyeni yollar açmaktadır. İlerleme, matematiksel modellerimiz, bilgisayar simülasyonlarımız ve bize gözlemler sağlayan gerçek dünya arasındaki ayrımı asla bulandırmamamızı gerektiriyor. Gelecek bölümde kestirim konusuna geri dönüyoruz.

IX. Bölüm

TAHMİN EDİLEBİLİRLİK: KAOS, TAHMİNLERİMİZİ KISITLAR MI?

Tam iki kere [parlamento üyeleri tarafından] bana şu soru yöneltildi: "Söylesenize, Bay Babbage, makineye yanlış sayı girerseniz, yanlış sayı mı çıkar?" Böyle bir sorunun sorulmasını tetikleyecek türden bir kafa karışıklığını tam olarak anlayabilmiş değilim.

Charles Babbage

Makinelerimize sürekli yanlış sayı giriyoruz; kaos çalışmaları herhangi bir "doğru sayı"nın var olup olmadığını belirlemeye yönelik ilgimizi tazeledi. Kestirim, modellerimiz ile gerçek dünya arasındaki bağlantıyı iki farklı yoldan incelemeye olanak sağlar. Modelimizin dizgenin davranışını kısa vadede tahmin etme yeteneğini sınayabiliriz. Ya da modellerimizi dizgenin kendisini nasıl değiştirebileceğimize karar verirken kullanabiliriz; burada, bir siyasaya karar vermek için iklim modelleri kullanırken olduğu gibi, geleceğin kendisini arzulanan ya da daha az arzulanan bir davranış yönünde değiştirmeye çabalarız.

Kaos, Laplace'ın şeytanı açısından hiçbir kestirim sorunu oluşturmaz: kesin başlangıç koşullarının, kusursuz bir modelin ve kesin hesaplamalar yapma gücünün var olması şartıyla, tıpkı periyodik bir dizgede olduğu gibi, kaotik bir dizgede de zaman içinde ileri giden izleri takip edebilir. 21. yüzyıl şeytanımızın da kusursuz bir modeli var ve doğru hesaplamalar yapabiliyor, ama –belirsiz geçmişe düzenli aralıklarla uzanıyor olsalar bile– kesin olmayan gözlemlerle sınırlı. Bu tarihsel gözlemleri şimdiki durumu tanımlamak için kullanamaz. Ancak, yapılan gözlemler çerçevesinde durum içinde kendi belirsizliğinin eksiksiz bir gösterimine sahiptir; bazıları buna durum için nesnel bir olabilirlik dağılımı adını verse de, burada bu konuya girmemize gerek yok. Bu gerçeklerin taşıdığı bazı anlamlar var: determinist bir dizgenin kusursuz bir modeli bile olabilirlik tahminlerinde bulunmaktan daha iyisini gerçekleştiremez. Biz daha iyisini gerçekleştirmeye heveslenemeyiz ve bu da demektir ki, determinist modellerimizin olasılık temelli değerlendirmesini benimsememiz gerekecek. Ama bütün bu şeytanlar Kusursuz Model Senaryosu dâhilinde var olmaktadır ve gerçek dünyaya dürüst tahminler sunmak istiyorsak kusursuz modeller ve irrasyonel sayılar gibi matematiksel kurguları terk etmeliyiz. Bunu zaten gerçekleştirdiğimizi açıklamamak sahtekârlık olur.

Kaosu tahmin etmek

Ve artık inanılmasın bu hokkabaz cadılara,
Kaypak sözlerle bizi aldatan,

Kulağımıza fısıldayarak sözler veren
Ve düş kırıklığına uğratan.

Macbeth (Beşinci Perde)

Tahmine kalkışanlar, tahminleri doğru çıktığında bile –teknik anlamda– eleştirilmiştir. Shakespeare'in *Macbeth* oyunu, teknik anlamda doğru olsa da, etkili karar desteği sağlamayan kestirimlere odaklanır. Macbeth cadılarla karşılaşıp da onlara ne iş yaptıklarını sorduğunda, "adı olmayan bir iş" yanıtını alır. Bundan birkaç yüzyıl sonra, Kaptan Fitzroy, "tahmin" terimini ortaya attı. Bir tahminin, modelleri sağlayanların bakış açısından içsel bir tutarlılık taşıması ama tahmini kullananın beklentilerini etkin bir biçimde yanlış yönlendirmesi olasılığı her zaman mevcuttur. Burada, Macbeth'in cadılara yönelik şikâyetinin temeli yatar: cadılar gönençli sayılabilecek bir geleceğe giden yolun iniş çıkışlarını defalarca gösterir. Her bir tahmin inkâr edilemeyecek düzeyde doğru çıkar, ama gönenç çok azdır. Belirsizliği kendi modelleri içinde sanki gelecekteki olayların gerçek dünyaya özgü olabilirliklerini yansıtıyormuş gibi yorumlayan modern tahminciler, *kaypak sözler* söylemek suçlamasından kaçınmayı umabilir mi? Macbeth'in ileri sürdüğü biçimde, olabilirlik tahminlerini titizlikle sözlere dökmek, dikkatimizi tamamen farklı bir yolla olup bitenlerden uzak tutmak için kaos bahanesine sığındığımızı açıklıkla bilmemiz kabilinden bir cürüm değil midir?

Doğruluktan açıklanabilirliğe

Eğer şu anda nerede olduğumuza ilişkin açık bir tablo sunamazsak, tahminlerde bulunanları nerede olacağımız

konusunda açık bir tablo sunamadıkları için suçlayamayız. Ancak, tahmin hatalarının hedef sayılan belli bir sınırın altında kalmasını sağlayabilmek için başlangıçtaki koşulu ne kadar doğrulukla bilmemiz gerektiği hakkında modellerimizin bize bir şeyler söylemesini bekleyebiliriz. Gürültüyü bu düzeye indirip indiremeyeceğimiz konusu –umut edilir ki– modelimizin yetkin bir doğrulukla bir başlangıç durumu sağlanması halinde tahminde bulunma yeteneğinden bağımsızdır.

İdealde, bir modelin gölgeleyebilmesi gerekir: sonuçta elde edilen zaman serisinin gözlemlerin zaman serisine yakın kalabilmesi için yineleyebileceğimiz bir tür başlangıç durumu olacaktır. Gölgenin mevcut olup olmadığını görmek için gözlemleri elde edene kadar beklememiz gerekir; "yakınlık" da gözlemsel gürültünün özellikleri tarafından tanımlanmalıdır. Ama gölgeleme yapan *hiçbir* başlangıç durumu bulunmuyorsa, model de temelde yetersizdir. Alternatif olarak, eğer gölgeleme yapan bir yörünge varsa daha birçok yörünge olacaktır. Tarihçeleri şimdiyi gölgeleyen mevcut durumlar toplamı ayırt edilemez sayılır: eğer Gerçek durum oralarda bir yerdeyse, onu tanımlayamayız. Bir tahmin oluşturacak biçimde ileri yönde yinelendiklerinde aralarından hangisinin gölgeleme yapmayı sürdüreceğini de bilemeyiz; ama bu ayırt edilemez durumların biriyle başlamış tahminlerin tipik gölgeleme zamanlarını bilmek bizi rahatlatabilir.

Şimdiye kadar gözlemleri gölgelemiş olan adaylara dayalı tahmin öbeklerine doğru yönlendiğimizi görmek oldukça kolaydır. Kusursuz bir modelin bile kusursuz olmayan başlangıç durumu karşısında kusursuz bir tahmin üretemeyeceğinin farkına vararak, 1960'larda, felsefeci Karl Popper,

tahmin hatasında belirli arzuların sınırlarını temin etmek için ilk belirsizliğin niceliği konusunda bir değer dile getirebilecek *açıklanabilir model* kavramını tanımladı. Bu sınırı ilk belirsizliğe göre belirlemek doğrusal olmayan dizgeler açısından doğrusal dizgelerde olduğundan çok daha zordur, ama açıklanabilirlik kavramını genelleştirebilir ve küme temelli tahminlerimizin olabilirlik dağılımlarını mantıklı bir biçimde yansıtıp yansıtmadığını değerlendirmek için kullanabiliriz. Kümelerimizin daima sonlu sayıda üyesi olacaktır ve bu nedenle de onlardan oluşturduğumuz her tür olabilirlik tahmini bu sonlu ayırım gücünden mustarip olacaktır: eğer 1000 üyeyle çalışıyorsak, o zaman, olayların çoğunun vuku bulmasının %1 şansa sahip olduğunu görmeyi umabiliriz; ama olayların vuku bulmasını yalnızca %0.001 ihtimalle ıskalama olasılığımız olduğunu da biliriz. Bir toplu kestirim dizgesini, ancak ve ancak, bize topluluğun olayları verili bir olabilirlik dâhilinde yakalayabilmesi için ne kadar büyük olması gerektiğini söylerse *açıklanabilir* kabul ederiz. Açıklanabilirlik birçok tahmine dayanarak istatistiksel açıdan değerlendirilmelidir, ama bu zaten istatistikçimizin yapmayı oldukça iyi bildiği bir şey.

21. yüzyıl şeytanımız doğru tahminlerde bulunabilir: geleceği bilemez ama gelecek onun için sürprizler içermez. Öngörülemeyen hiçbir olay olmaz ve alışılmadık olaylar da beklenen sıklıkta gerçekleşir.

Model yetersizliği

Elindeki kusursuz modelle, 21. yüzyıl şeytanı, yararlı olabilirlikleri hesaplayabilir. Biz neden hesaplayamıyo-

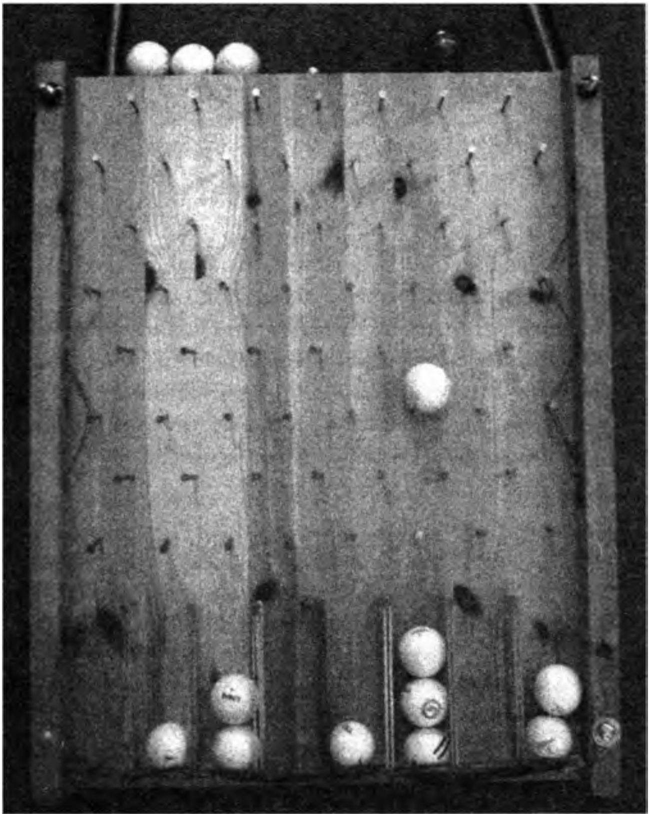
ruz? Hesaplayabileceğimizi ileri süren istatistikçiler var – bunlara bu kitabı gözden geçirenlerden biri de dâhil olabilir; bunlar kendilerini Bayesçiler olarak adlandıran geniş bir istatistikçiler grubunu oluşturur. Bayesçilerin çoğu, oldukça mantıklı bir biçimde, olabilirlik kavramlarını doğru bir biçimde kullanmakta ısrar ederken aralarındaki küçük ama sesini iyi duyuran bir küme modellerimizde görülen farklılığı gerçek dünyadaki belirsizlikle karıştırmaktadır. Nasıl ki olabilirlik kavramlarını yanlış kullanmak bir hataysa, bunları ait olmadıkları bir yerde uygulamak da bir hatadır. Galton Kutusu'ndan türetilen bir örneği inceleyelim.

Şekil 2'ye tekrar bakın. Soldaki resmin modern örneklerini internetten satın alabilirsiniz; arama motoruna "quincunx" (= beşli diziliş kutusu) yazmanız yeterli. Sağdaki resme denk düşen makineyi bulabilmek daha zor. Modern istatistikçiler, Galton'ın bu makineyi gerçekten de yapıp yapmadığını bile sorguluyor; her ne kadar Galton bu versiyonla gerçekleştirdiği deneylerden söz etse de, bunlara "zihinsel deneyler" adı verilir, zira beklenen kuramsal sonuçları üretecek bir gereç inşa etme yönündeki modern çabalar bile "görevi tatmin edici bir biçimde başaracak bir gereç yapmanın aşırı düzeyde zor" olduğunu bulmuştur. Kuramcının gereç kuramına uymayınca gereci suçlaması alışılmadık bir şey değildir. Bu, belki de, yalnızca matematiksel modellerimizin yansıtması amaçlanan fiziksel dizgelerden farklı olduklarının bir göstergesi olabilir mi? Modellerimiz ile gerçeklik arasındaki farkları açıklamak için, Şekil 25'te gösterilen Galton Olmayan (GO) Kutu ile yapılmış deneyleri inceleyeceğiz.

GO Kutu: bir keşmekeş örneği

GO Kutu, "Galton Olmayan Kutu"dur. İlk olarak, Galton'ın da üyesi olduğu Kraliyet Meteoroloji Topluluğu'nun 150. yılını kutlamak üzere düzenlenen bir toplantı için yapıldı. GO Kutu'da, Galton Kutusu'ndakini andıracak biçimde dağıtılmış sıra sıra çiviler bulunur, ama çiviler birbirlerinden daha uzak yerleştirilmiştir ve kusursuz bir biçimde çakılmamıştır. Kutunun tepesindeki küçük beyaz çiviye dikkat edin, yarı düzlemin biraz solunda. Kurşun bilyelerle dolu bir hazne yerine GO Kutu'ya tek tek golf topları atılır ve her biri tamamen aynı noktadan başlar – ya da bir golf topu beyaz çivinin altına ne kadar aynı konumda yerleştirilebilirse, oradan. Golf topları gerçekten de çok güzel bir ses üretirken her bir çiviye ikili düzende denk düşmez; aslında, ara sıra da olsa, bir sonraki düzeye inerken birkaç çiviyi yatay aşabilirler. Galton Kutusu ve Rulet'te olduğu gibi, GO Kutu'nun dinamikleri de yinelenen türden dinamikler değildir: her bir topun dinamiği geçicidir ve bu nedenle bu dizgeler kaos göstermez. Spiegel bu davranışa *karmaşa* adının verilmesini önermekteydi. Galton Kutusu'nun aksine, GO Kutu'nun dibinde golf toplarının dağılımı çan şekilli dağılımı yansıtmaz; ancak, bir sonraki topun nereye düşebileceğinin olabilirlik taşıyan bir tahminini elde etmek için golf toplarının bir toplamını kullanabiliriz.

Ama, gerçeklik bir golf topu değildir. Gerçeklik kırmızı bir lastik toptur. Ve yalnızca bir kez düşer. Laplace'ın şeytanı başka neler olmuş olabileceği konusunda tartışmaya yer bırakmazdı: başka hiçbir şey olmuş olamazdı. Burada



25. GO Kutu ilk olarak St. John's College, Cambridge'te, Kraliyet Meteoroloji Topluluğu'nun 150. yılını kutlamak için yapılan bir toplantıda tanıtıldı. Dikkat ederseniz, kutuda düşen golf topu basit ikili seçimler yapmaz.

yapılabilecek bir benzetme, kırmızı lastik topu Dünya atmosferi, golf toplarını da model küme üyelerimiz olarak kabul etmek. Dilediğimiz kadar üyeye yatırım yapabiliriz. Peki, golf toplarımızın dağılımı kırmızı lastik topun tek bir geçişi konusunda bize neler söyler? Golf toplarında gözlemlediğimiz davranış çeşitliliği bize yararlı bir şeyler söyler mi? Hiçbir şey olmasa bile, bize belirsizliğimiz konusunda, ötesine geçtiğimizde emin olamayacağımızı bildiğimiz daha düşük bir sınır verir; ama asla –olabilirlik taşıyan açılardan bile– tamamen emin olabileceğimiz bir sınır sağlayamaz. Yakın örnekseme açısından, modellerimizin çeşitliliğini incelemek çok yararlı olabilir – görünürde hiçbir olabilirlik tahmini bulunmasa da.

Kırmızı top golf topuna çok benzer: kabaca aynı olsa da golf topununkinden bir parça geniş bir çapa sahiptir ve, biraz daha sert olsa da, benzer elastik yapıdadır. Ama, gerçekliği temsil eden kırmızı top, bir golf topunun yapamayacağı şeyleri yapabilir: bazıları beklenmediktir, bazılarıysa değil; bazıları tahminimize uygundur, bazıları uygunsuz; bazıları bilinir, bazıları bilinmez. GO Kutu'da, golf topu gerçekliğin iyi bir modelidir – gerçekliğin yararlı bir modeli. Golf toplarının bu dağılımını nasıl yorumlamalıyız? Bunu kimse bilmiyor. İstatistiksel araştırmanın ön saflarına hoş geldiniz. Ve dahası da var. Golf toplarının dağılımını gerçekliğin bir golf topu olduğu varsayımına bağlı bir olabilirlik tahmini olarak da yorumlayabiliriz. İnsanın kusursuz olmayan bir modele dayalı olduğunu bildiği olabilirlik tahminlerini bunlar sanki gelecek olayların olasılığını yansıtıyormuş gibi sunması –o tahminin hemen altındaki küçücük yazılarda neler yazılı olursa olsun– kaypaklık olmaz mı?

Bizim kümelerimiz yalnızca golf topları kullanmakla sınırlı değil. Biraz daha küçük çapta yeşil lastik toplar alıp deneyi yineleyebiliriz. Eğer golf toplarımızdakine benzer bir yeşil top dağılımı elde edersek, modelimizdeki yetersizliklerin söz konusu tahminde o kadar da büyük bir rol oynamadığı konusunda cesaretlenebilir, hatta, daha da iyisi, bu konuda ümitlenebiliriz. Ya da iki modelimiz zaten farkında olduğumuz aynı dizgesel eksiklikleri paylaşabilir. Peki ya golf topları ile yeşil topların dağılımları önemli ölçüde farklıysa? O zaman, ikisine de güvenemeyiz. Modellerimizin farklılığını bu çok modelli kümelerle ölçmek, gerçekliğin tek bir geçişi için olabilirlik taşıyan bir tahmin yapılandırmamıza nasıl olanak sağlayabilir? Dünyadaki en iyi modelleri kullanan mevsimsel hava tahminlerine baktığımızda, her bir modelin dağılımı bir arada kümelenme eğilimi gösterir – her birininki farklı bir biçimde. Bu durumda, karar desteği ya da bir tahmin nasıl mümkün olur? Amacımız ne olmalı? Hatta, elimizde yalnızca görgül açıdan yetersiz modeller varken, nasıl bir hedef belirleyebiliriz? Eğer saflık eder ve bir modeller topluluğunun çeşitliliğini olabilirlik olarak yorumlarsak, tekrar tekrar yanlış yöne saparız; daha işin en başında modellerimizin kusursuz olmadığını biliyoruz, bu nedenle de "öznel olabilirlik" konulu her türlü görüş hile olur: daha işin başında modellerimize (onların herhangi birine) inanmamaktayız.

Sonuç ortada: modellerimiz kusursuz olsa ve Laplace'ın şeytanının kaynaklarına sahip olsak, geleceği biliriz; modellerimiz kusursuz olsa ve 21. yüzyıl şeytanımızın kaynaklarına sahip olsak, Doğa Yasaları'nın determinist olduklarını bilsek bile, kaos bizi olabilirlik tahminleriyle

sınırlandırır. Gerçek Doğa Yasaları'nın stokastik olabileceği düşüncesiyle, evrenin mevcut durumu hakkında kesin bilgiye sahip olarak ya da olmayarak, açıklanabilir olabilirlik tahminleri sunacak bir istatistikçi şeytanı hayal edebiliriz. Ama, ister determinist ister stokastik olsunlar, matematiksel açıdan kesin Doğa Yasaları'nın var olduğuna inanmak, tahminler sunan çok çeşitli şeytanlarımızdan herhangi biriyle ormanda karşılaşıvereceğimiz umudu kadar hayal değil mi?

Her ne olursa olsun, görünüşe bakılırsa, basit fiziksel dizgeler –ya da karmaşık olanlar– için yeterli denklemleri şu anda bilmiyoruz. Kaos çalışmaları, zorluğun "girilecek" sayının belirsizliğinde değil, içine herhangi bir şey konulabilecek görgül açıdan uygun bir modelin bulunmamasında yattığını akla getirir: kaosla başa çıkabiliriz, ama tahmin edilebilirliği sınırlandıran şey kaos değil, model yetersizliğidir. Bir model inkâr edilemez biçimde dünyanın en iyi modeli olabilir, ama bu bize görgül açıdan uygun olup olmadığı konusunda hiçbir şey anlatmaz – uygulamada yararlı, hatta güvenilir olup olmadığına ise hiç değinmez. Temelden hatalı olmasını bekledikleri tahminleri "modelin kusursuz olması varsayımıyla" ya da "mevcut en iyi bilgi" gibi gözbağcı ifadelerle astarlayan tahminciler teknik açıdan doğruyu söylüyor olabilirler, ama eğer bu modeller geçmişi gölgeleyemiyorsa, o zaman, "başlangıç durumundaki belirsizlik" ifadesinin ne anlam taşıdığı açık değildir. Modellerinin kusursuz olduğu varsayımıyla gerçekleştirdikleri olabilirlik tahminlerinin eksiklikleri için suçu kaosa atanlar, modellerinin yetersiz olduğunu en aştan bilenler, savsaklayıcı ifadeleriyle bizi küçümsemektedir.

X. Bölüm

UYGULAMALI KAOS: MODELLERİMİZİN ÖTESİNİ GÖREBİLİR MİYİZ?

Bütün önermeler gerçek,
Bütün modeller yanlış.
Bütün veriler hatalı.
Ne yapacağız şimdi?

Bilim insanları her gün ortaya çıkıp geleceğe ilişkin görüşlerini sunan gerçek zamanlı tahmincilere neler borçlu olduklarını genellikle görmezden gelir. Bunlar arasında hava tahmincileriyle ekonomistler ön plana çıkarken, profesyonel kumarbazlar iş görürken imajlarından fazlasını riske atarlar. Ve de bahisçiler. Kaos çalışmaları, model oluşturmanın yeniden gözden geçirilmesini başlatarak, modellerimizin ötesinde görebileceğimiz şeylerin sınırlarını açıklığa kavuşturdu. Nişan alınacak bir hedefin var olduğunu bildiğimiz matematiksel dizgeler ile hedeflediğimiz şeyin pekâlâ var olmayabileceği fiziksel dizgeler açısından, bunu taşıdığı anlamlar elbette farklı olacaktır.

En temelde model oluşturma: veriye dayalı modeller

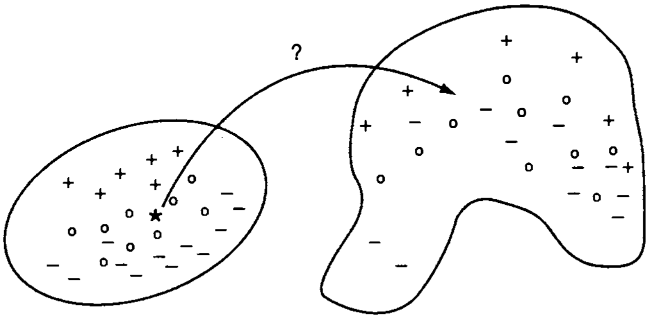
Dört tip veriye dayalı model inceleyeceğiz. Bunların en basitleri, her şeyin şimdi olduğu gibi kalacağını varsayan *sürerlik modelleri*dir. Bunun basit dinamik bir çeşitlemesi, ivintilerin sürerliğini varsayan *yatay iletim modelleri*dir: burada, doğu yönünde ilerleyen bir fırtınanın doğu yönünde aynı hızla ilerlemeyi sürdürmesi tahmininde bulunulur. Fitzroy ve Le Verrier bu yaklaşımı 1800'lerde kullanırken yaklaşmakta olan bir fırtınadan önce hedefe varabilen telgraf sinyallerinden yararlandı. Üçüncüsü, *benzeşik modeller*dir. Lorenz'in 1963 tarihli klasik makalesi şu tümceyle sona erer: "Gerçek atmosfer söz konusu olduğunda, eğer bütün yöntemler başarısız olursa, onun bir benzeşini bekleyebiliriz." Benzeşik bir model, mevcut duruma benzer bir önceki durumun tanımlanabilmesi için, geçmiş gözlemlerin derlenmesini gerektirir; bu tarihsel benzeşimin bilinen evrimi de tahmini sağlar. Bu yöntemin nitelikli olup olmaması, ne kadar iyi gözlem yaptığımıza ve derlememizin yeterince iyi benzeşimler içerip içermediğine bağlıdır. Yinelenen bir dizgeyi tahmin ederken iyi bir benzeşim elde etmek yalnızca derlemenin hedeflerimiz ve gürültü düzeyi açısından yeterince geniş olup olmadığına bağlıdır. Uygulamada, derlemeyi oluşturmak sabırdan fazlasını gerektirebilir; yinelenmeyi gözlemlemek için gerektiği düşünülen zaman, dizgenin yaşam süresinden daha uzunsa ne yapılabilir?

Geleneksel istatistik bu üç yaklaşımı uzun zamandır tarihsel istatistikten tahminler çıkarma bağlamında kul-

lanmakta. Takens Önermesi kaotik dizgeler için bunların herhangi birinden daha iyisini gerçekleştirebileceğimizi ileri sürer. Diyelim ki, bir derlemeden yola çıkarak yarınki atmosferin durumunu tahmin etmek istiyoruz. Durum şematik olarak Şekil 26'da gösterilmektedir. Benzeşik yaklaşım, derleme içinden bugünün atmosfer durumuna en yakın olanı almak ve bir sonraki gün ne olduğunu yarının tahmini olarak rapor etmektir. Takens Önermesi birbirine yakın benzeşimlerin derlemesini almayı ve tahminlerimizi oluşturmak için bunların sonuçları arasında kestirim yapmayı önerir. Veriye dayalı bu *gecikmeyi yeniden yapılandırma modelleri* kusursuz olmasalar da yararlı olabilirler: tek yapmaları gereken, elimizde mevcut diğer seçenekleri aşmak –ya da tamamlamak– olacaktır. Benzeşik yaklaşımlar mevsimsel hava tahminlerinde popüler olmayı sürdürürken, rulet veriye dayalı bir modellemenin başarı öyküsünü örnekler.

Rulette kazanan rakamın üzerine oynamak kolay: tek yapmanız gereken her bir rakama bir dolar yatırmak; her seferinde kazanan siz olursunuz. Elbette para kaybedersiniz, çünkü kazanan taraf 36 dolar alırken her seferinde 36'dan fazla numaraya para yatırmalısınız. "Hepsine oyna" stratejileri her bir oyunda para kaybettirir; kumarhaneler bunu epey önce keşfetti. Kâr edebilmek, her bir seferinde kazanan numaraya oynamaktan daha iyisini gerektirir: kumarhanenin kazanma olasılığından daha iyi bir olabilirlik taşıyan tahmin gerekir. Neyse ki, bu, görgül yeterliliğin ya da matematiksel açıklanabilirliğin sert gereksinimleri olmadan da başarılabilir.

Top oyuna girdikten sonra da bahse girilebilmesi gerçeği ruleti fizikçiler ve olabilirlik istatistikçileri açısından



26. Veriye dayalı bir durum uzamda tahminde bulunmak için benzeşimler arasında yorumda bulunmanın şematik gösterimi. Her bir yakın noktanın iminin nereye düştüğünü bilirsek "*" ile işaretlenmiş nokta için bir tahmin oluşturabiliriz.

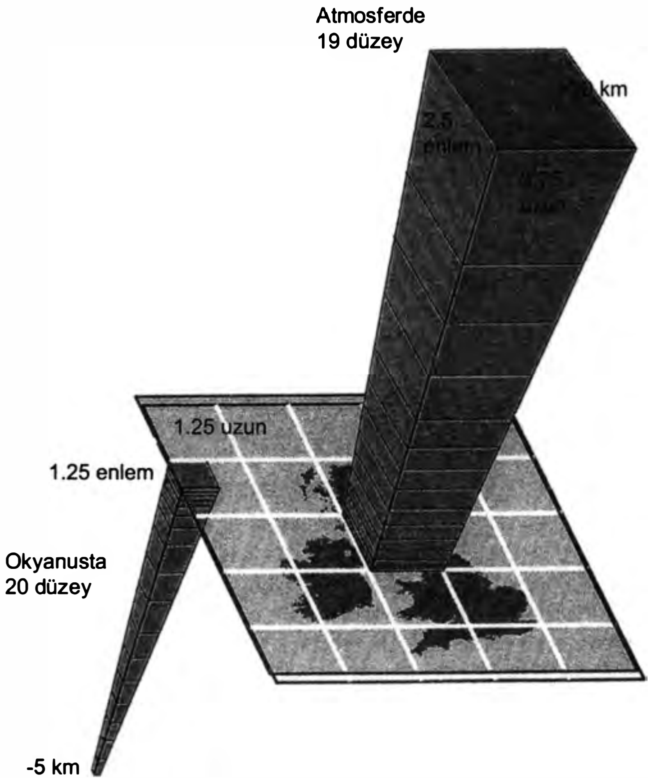
özellikle ilginç hale getirir. Diyelim ki, topun sıfırdan her geçişini sol ayağınızın başparmağıyla ve sıfır sayısının masadaki bir noktayı her geçişini de sağ ayağınızın başparmağıyla kaydediyorsunuz: kovboy çizmelerinizin topuklarına yerleştirilmiş bir bilgisayar, topun rulet çarkının hangi çeyreğinde kalacağını hangi sıklıkla doğru bir biçimde tahmin eder? Çarkın doğru çeyreğini tüm tahminlerin yarısında doğru tahmin etmek, olabilirlikleri sizin lehinize çevirir: doğru tahminlerde yitirdiğiniz miktarın yaklaşık dört katını kazanırsınız ve bu da bahse girdiğiniz miktarın üç katını size bırakır – geri kalan tahminlerde de yarısını yitirirsiniz. Böylece, ortalama olarak, riske attığınız paranın yaklaşık bir buçuk katını kazanırsınız. Bu yöntemi kaç kişinin denediğini dünya asla öğrenemeyecek olsa da, tek bir defada bunun alt sınırını tanımlayabiliriz: öykü, Thomas Bass

tarafından "The Newtonian Casino"da çok güzel bir dille anlatılır.

Simülasyon modelleri

Peki ya en benzer benzeşimler yeterince ayrıntılı bir tahmin sağlayamadıysa? Alternatiflerden biri, "ilk prensipler"den yola çıkarak dizge için bir model oluşturacak kadar fizik öğrenmektir. Bu tür modeller bilim alanında baştan çıkarıcı düzeyde yararlı olduklarını kanıtladı, ama model ülkesinden geri dönüp tahminlerimizi gerçek gözlemlerle değerlendirmeyi de unutmamalıyız. Dünyadaki en iyi modele sahip olabiliriz, ama bu modelin kararlar vermekte değer taşıyıp taşımadığı ayrı bir konu.

Şekil 27, Birleşik Krallık Meteoroloji Dairesi'nin bir İklim Modeli'nin durum uzamını yansıtan bir şemadır. Bir sayısal hava kestirimi (SHK) modelinin durum uzamı benzer çizgiler taşırsa da, hava modelleri iklim modelleri kadar uzun süre işletilmediği için okyanuslar, denizdeki buz ya da toprağın kullanımı gibi yavaş değişen unsurların sabit oldukları varsayılarak bu modeller genellikle basite indirgenir. Şema modelleri geçmiş bölümlerdeki basit haritalardan daha karışık gösterse de, dijital bir bilgisayara aktarıldığında hava modelinin yinelenmesi artık hiç de daha karışık değildir – yalnızca daha karmaşıktır. Atmosfer ve okyanus –bazı modellerde de Dünya kabuğunun ilk birkaç metresi– etkili bir biçimde kutulara bölünmüştür; model değişkenleri –sıcaklık derecesi, basınç, nem, rüzgâr hızı ve diğerleri– her bir kutudaki tek bir sayı tarafından



27. Hava ve iklim modellerinin atmosferi ve okyanusu "karelere" bölme yaklaşımını yansıtan bir şema. Burada, atmosferdeki her bir kare yaklaşık 250 x 250 kilometrelik bir alanı temsil eder – bu da, yukarıda gösterildiği gibi, Britanya'nın tamamı için yaklaşık altı kare eder.



28. Richardson'ın kurduğu hayalin çizimi; burada, insan bilgisayarlar büyük ölçüde koşut bir biçem içinde hava olaylarını henüz gerçekleşmeden tahmin etmek için çalışmakta. Dikkat edilirse, merkez platformdaki yönetici, Kuzey Florida üzerine ışık tutuyor – muhtemelen oradaki bilgisayarların projeyi yavaşlattıklarını belirtiyor (ya da acaba oradaki hava koşulları hesaplamayı zorlaştıracak kadar değişken mi?).

tanımlanır. Her bir kutudaki her bir değişken için bir sayı olduğundan model durum çok geniş olabilir – bazıları 10.000.000'un üzerinde bileşene sahiptir. Modelin durumunu güncellemek basit, hatta sıkıcı bir iştir; tek yapmanız gereken, kuralı her bir bileşen için uygulamak ve tekrar tekrar yinelemektir. Richardson bunu elle gerçekleştirdi ve bir gün öncesinden tahminler yapmak için yıllarını

harcadı. Hesaplamaların "yakın" hücrelerden gelen bileşenlere odaklanması gerçeği, Richardson'ın Şekil 28'de gösterildiği gibi düzenlenmiş bir oda dolusu bilgisayarın aslında hava durumunu gerçekleşmesinden çok daha hızlı hesaplayabileceğini düşünmesine neden oldu. Yazılarını 1920'lerde kaleme alan Richardson'ın bilgisayarları insanlardı. Bugünün çok işlemcili dijital süper bilgisayarları aşağı yukarı aynı kalıbı kullanır. SHK modelleri şimdiye kadar yazılmış en karmaşık bilgisayar kodları arasında yer alır ve genellikle de hayranlık uyandıracak derecede gerçekçi görünen simülasyonlar üretir. Ama bütün modeller gibi onlar da hedefledikleri gerçek dünya dizgelerinin kusursuzluktan uzak gösterilişleridir ve bu modelleri başlatmak için kullandığımız gözlemler gürültülüdür. Böyle değerli simülasyonları işlerimizi yürütmek için nasıl kullanacağız? Hiç değilse bugünden gelecek hafta için yapılan tahminin ne kadarına güvenebileceğimiz hakkında bir fikir edinebilir miyiz?

Küme hava tahmin dizgeleri

> En son KKD, Cornwall üzerine Kuzey Fransa'dan inen cepheyi gösteriyor. Feribot rezervasyonları hakkında danışılabilecek seyahat acentesi tanıyor musun? Tim.
>
> 5 Ağustos 1999 tarihli e-posta

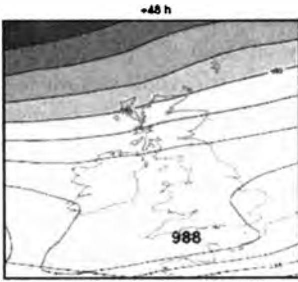
1992'de, Atlantik'in her iki yakasındaki operasyonel hava tahmin merkezleri büyük bir adım attı: takip eden hafta havanın tam olarak nasıl olacağını söyleme-

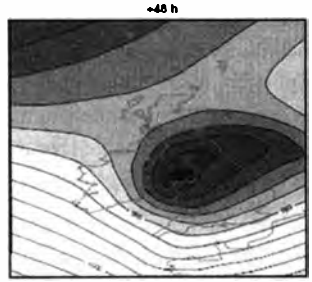
yi bıraktılar. Onyıllardan beridir günde bir kez bilgisayar simülasyonlarnı çalıştırmaktaydılar. Bilgisayarlar gitgide hızlanınca modeller de gitgide daha karmaşık hale gelmiş, önlerindeki tek sınır da hava koşulları henüz gideceği yere ulaşmadan epey önce tahmini elde etme gereksinimi olmuştu. Bu “en iyi” tahmin için çalışma uğraşı 1992’de sona erdi; en karmaşık bilgisayar simülasyonunu bir kez çalıştırıp gerçekliğin tümüyle ters istikamette işlediğini seyretmek yerine, biraz daha az karmaşık bir model birkaç düzine kez çalıştırıldı. Bu topluluğun her bir üyesi, bir parça farklı bir yolla işe koşuldu. Tahminciler simülasyonlar topluluğunun zaman içinde izleyen haftaya doğru evrimleşirken birbirlerinden uzaklaşmalarını izleyip bu bilgiyi her bir gün için tahminin *güvenilirliğini* nitelendirmekte kullandılar. Bu, Küme Kestirim Dizgesi’dir (KKD).

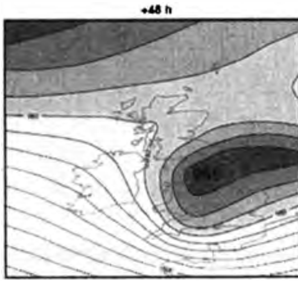
Küme tahmini yaparak atmosfer hakkındaki mevcut bilgimizle ve modelimizle tutarlı alternatifleri inceleyebiliriz. Bu da bilgiye dayalı karar desteği açısından önemli avantajlar sağlar. 1928’de, Sir Arthur Eddington, 11 Ağustos 1999’da “Cornwall’dan seyredilebilir” bir güneş tutulması olacağını tahmin etti. Ben bu tutulmayı izlemek istedim. İngiltere’nin Reading kentindeki Avrupa Orta Menzilli Hava Tahminleri Merkezi’nin (ECMWF) Olabilirlik Tahmin Bölümü Yöneticisi Tim Palmer gibi. Güneş tutulması yaklaşırken Cornwall üzerinde hava kapanacak gibiydi. Tim’in bu bölümün başında yer alan e-posta iletisi tutulmadan altı gün önce gönderilmişti: ayın 11’i için topluluğu incelediğimizde Fransa üzerinde açık hava öngören grup üyelerinin sayısının Cornwall için aynı öngörüde bulunanların sayısını aştığını gördük. Aynısı ayın 9’unda da

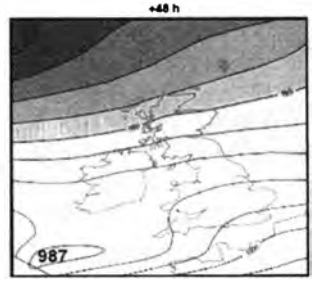
gerçekleşti ve feribotla Fransa'dan İngiltere'ye doğru yola çıktık. Orada güneş tutulmasını izledik – KKD tarafından belirtilen olasılığı kullanmamız ve Tim'in direksiyonu sağda olan bir arabayı Fransa'nın daracık patikalarında ustaca kullanması sayesinde son anda daha iyi bir görüntü elde edebilmek üzere yaptığımız hamleydi bu – Tim'in siyah gözlüklerini bir tarafa bırakıyorum. Modelimizde, kaos incelemesi, atmosfer hakkındaki mevcut belirsizliğimizin güneş tutulmasının nereden izlenebileceğini ve nerede bulutların ardında kalacağını kesin olarak söylemenin –bir hafta öncesinden bile– olanaksız olduğunu göstermekte. Bu belirsizliğin izini sürmek amacıyla bir küme tahmini yürüterek, KKD, etkili bir karar desteği sağladı. Modelin kusursuzluğu konusunda hiçbir varsayımda bulunmamız gerekmedi ve görünürde de hiçbir olabilirlik dağılımı bulunmamaktaydı.

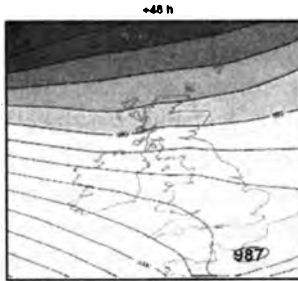
KKD'nin ilk kez 1992'de devreye girmesinden bu yana, Ocak 1990'daki Burns' Day fırtınası için hiçbir küme tahmini gerçekleştirilmemişti. ECMWF, Burns' Day fırtınası gerçekleşmeden iki gün öncesine ait verileri kullanarak geriye yönelik bir küme tahmini yaptı. Şekil 4'te, modern hava modelinin *–analiz* adıyla bilinir– gözüyle fırtına, I. Bölüm'de ele alınan başat gemi gözlemlerinden önceki veriler kullanılarak gerçekleştirilen iki gün evvelki bir tahminin yanında veriliyor. Dikkat edilirse, tahminde fırtına yok. Fırtınadan önceki on iki başka küme üyesi de Şekil 29'da yer alıyor; bazılarında fırtına var, bazılarında yok. Üst sıradaki ikinci küme üyesi, analizle hayret uyandıracak kadar benzerlik gösteriyor; diğer üyeler Britanya'ya özgü sıradan bir kış gününü gösterirken onun iki sıra aşağı-

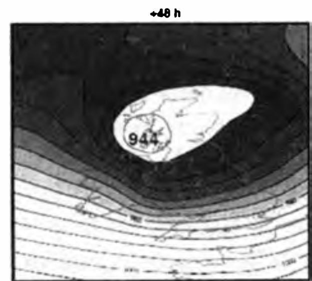




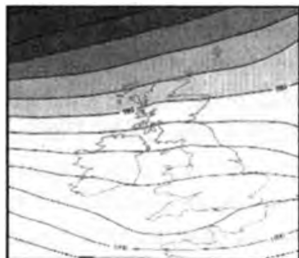


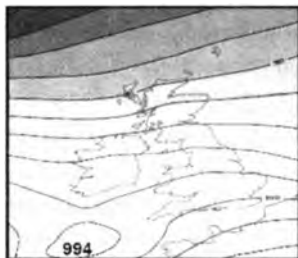


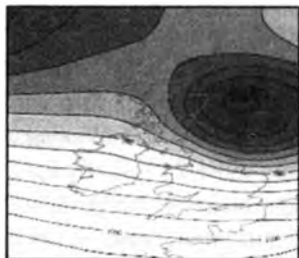


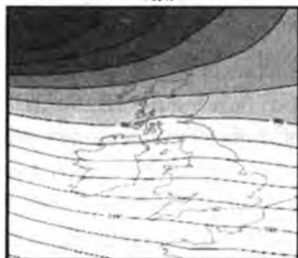


29. Burns' Day fırtınasından iki gün öncesine ilişkin ECMWF hava modelinden alınan bir tahminler topluluğu: bazıları fırtına gösterirken bazıları göstermiyor. Şekil 4'te görülen tek bir "en iyi" tahminin aksine, burada, elimizde fırtınaya yönelik bazı uyarılar bulunmakta.

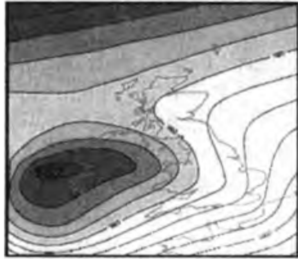

+48 h


+48 h
994


+48 h


+48 h


+48 h


+48 h

sındaki üye tam bir fırtına göstermekte. Can alıcı önemdeki gemi gözlemleri bu KKD'nin sonrasında yapıldığı için, bu küme bir fırtına olasılığı olduğu uyarısını sağlayabilir ve tahminci üzerindeki baskıyı da büyük ölçüde azaltabilirdi. Daha uzun erken teşhis süreleri dâhilinde, Burns' Day fırtınasından üç gün öncesine ait küme tahminlerinde bazı üyeler İskoçya üzerinde fırtına gösterirken, dört gün öncesine ilişkin küme tahmininde o yakınlarda büyük bir fırtına gerçekleşeceğini gösteren bir üye bile mevcut. Küme erken uyarı sağlamaktadır.

Her türlü erken teşhis süresinde, Burns etkisiyle başa çıkmak zorundayız: ECMWF hava "golf topları" derlememiz, "endişeyle tahminde bulunurken" modelimizin davranışının aslında gerçek dünyadaki gelecekle ilgili belirsizliği nitelendirmeksizin bize yardım etme konusunda sahip olduğu çeşitliliği sergiler. Aslında, bu çeşitliliği genişletebiliriz; eğer yeterli bilgisayar donanımımız varsa ve belirli gözlemlerin güvenilirliğini sorguladıysak, bu gözlemleri kullanarak küme üyelerinden bazılarını işletip diğerlerini atlayabiliriz. 1990'daki Burns' Day fırtınasına benzer bir durumla bir daha asla karşılaşmayacağız. Küme üyelerimizden hangilerinin en gerçekçi olduğunu ayırt etme şansımızı en üst düzeye çıkaracak biçimde tasarlanmış gelecek gözlemleri nerede yapacağımıza karar verebiliriz: gelecekte fırtına gösterenleri mi dikkate almalıyız, yoksa göstermeyenleri mi?

"En iyi" modeli belirlemeye çalışmak için gereğinden fazla enerjiyi boşa harcamak yerine, farklı modellerden gelen küme üyelerinin aşırı düzeyde pahalı bir süper modelin tek bir simülasyonundan daha fazla değer taşıdığını

öğrenebiliriz. Ama GO Kutu'nun verdiği dersi de unutmadan: kümelerimiz modellerimizin çeşitliliğini gösterir, gelecekteki olayların olabilirliğini değil. Kümeleri başlangıç koşulları, parametre değerleri, hatta matematiksel model yapıları açısından inceleyebiliriz, ama, görünüşe bakılırsa, kullanışlı olabilirlik tahminlerini bir tek 21. yüzyıl şeytanımız gerçekleştirebilir. Neyse ki, bir KKD karar vermek için kullanacağımız olabilirlikleri vermeden de bilgi sağlayabilir.

1999 yılında, Noel gününün hemen ardından bir başka büyük fırtına Avrupa'yı silip süpürdü. Fransa'da T1, Almanya'da da Lothar adı verilen fırtına yalnızca Versailles'da 3000 ağacı yok etti ve Avrupa'da ödenen sigorta tazminatları yeni rekorlar kırdı. Fırtınadan kırk iki saat önce ECMWF her zamanki 51 üyelik KKD tahminini gerçekleştirdi. 51 üyelik topluluğun on dört üyesi fırtına gösterdi. Bunların bir GO Kutu üzerindeki golf toplarından ibaret olduklarını unutup bunu büyük bir fırtına olasılığını %28 olarak gösteren bir tahmin gibi değerlendirmek daha çekici. Bu ayartmaya karşı koyulması gerekse de, karşımızda büyük yarar sağlayan bir diğer KKD tahmini durmakta. Daha gerçekçi ve daha karmaşık bir modeli tek bir kez işletmek de fırtına sonucunu verebilir ya da hiçbir fırtına göstermeyebilirdi: KKD bu olasılığı niceliğe dökebiliyorken fırtınayı görememe riskine ne diye girelim? Küme tahmini, belli ki, mantıklı bir fikir, ama sınırlı kaynaklarımızı daha pahalı bir model kullanmakla daha geniş bir küme oluşturmak arasında tam olarak nasıl paylaştırmamız gerekir? Bu araştırma sorusu henüz yanıt bekliyor. Şimdilik, ECMWF'nin KKD'si çok önemli bir katma de-

ğerle modellerimiz yoluyla görülen alternatif gelecek senaryolarının bir kısmını sağlıyor.

Halka düzinelerce hava tahmin haritası göstermeden küme içindeki bu bilginin nasıl iletileceği de yanıt bekleyen bir soru. Ciddi hava koşullarına çok sık rastlanılan Yeni Zelanda'da, Meteoroloji Servisi kendi web sitesinde düzenli olarak olabilirlik taşıyan yorumlarda bulunuyor – "beşte iki olabilirlik" gibi ifadelerle. Bu da olası bir olayın betimlenmesine önemli değer katıyor. Elbette, meteoroloji uzmanları genellikle ciddi bir fırtına fetişine tutunurken enerji şirketleri de her gün daha sıradan hava koşullarına yönelik yararlı bilgiler almanın sağladığı önemli ekonomik değeri kullanmaktan memnun. Hava koşullarının değişmesi riskinin önem taşıdığı diğer iş alanlarında çalışanlar da uyum göstermeye başlıyor.

Kaos ve iklim değişikliği

İklim ağaçtaki kuştur. Hava ise elindeki.

Robert Heinlein, *Time Enough for Love* (1974)

İklim modeli oluşturmak havayı tahmin etmekten temel düzeyde ayrılır. Bundan bir yıl sonra Ocak ayının ilk haftası havanın nasıl olacağını düşünün. Avustralya'da yaz ortası, kuzey yarımkürede de kış ortası olacak. Bir tek bu bile bize beklenebilecek hava sıcaklıklarının çeşitliliği hakkında bir fikir vermekte: bu beklentiler toplamı iklimdir – idealde de akla gelebilecek her hava kalıbının göreceli olasılığını yansıtır. Eğer fiziksel determinizme ina-

nıyorsak, o zaman, gelecek Ocak ayının havası zaten önceden saptanmış demektir; böyle olsa bile, bizim iklim derlemesi kavramımız geçerlidir, zira mevcut modellerimiz bu önceden saptanmış geleceği ayırt edebilecek durumda değil. İdeal küme hava tahmini kendisine denk düşen iklim dağılımından ayırt edilemez hale gelene kadar atmosferin durumundaki her türlü birincil belirsizliğin büyümesini izleyecektir. Modeller kusursuz olmayınca, elbette, bu pek gerçekleşmez, çünkü model simülasyonları toplamı gerçek dünyanın çekicisine (eğer böyle bir şey varsa) doğru değil de modelin çekicisine doğru evrimleşir. Kusursuz bir model olsa bile –ve Eddington'ın dikkatleri çektiği insanın hür iradesinin etkilerini bir kenara bırakırsak– Dünya'nın mevcut durumlarına dayalı doğru olabilirlik tahminleri tam şu anda Güneş'ten ayrılmakta olan ya da güneş sisteminin ötesinden sisteme girmek üzere olan, prensipte bile bugün haklarında hiçbir şey bilemeyeceğimiz etkiler tarafından engellenir.

İlkim modeli oluşturmanın hava tahmininde bulunmaktan farklılık göstermesinin bir diğer nedeni, iklim modeli oluşturmanın genellikle bir "ya şöyle olursa" bileşeni içermesidir. Atmosferdeki karbondioksit (CO_2) ile diğer sera gazlarının miktarını değiştirmek Lojistik Denklem'de α parametresini değiştirmeye benzer; biz parametre değerlerini değiştirince çekicinin kendisi değişir. Diğer bir deyişle, hava tahmincileri Şekil 25'teki GO Kutu'da kırmızı bir lastik topun bir tek düşüşü karşısında golf toplarının düşüşlerinin taşıdığı anlamı yorumlamaya çalışırken iklim modeli oluşturanlar da eğer çivilerin yerleri değiştirilirse neler olacağı sorusuyla işi daha da karmaşıklaştırır.

İklim modelinin yalnızca tek bir geçişine bakmak, 1990'daki Burns' Day için yalnızca tek bir tahmine bakmakla aynı tehlikeyi taşırsa da, böylesine safça bir aşırı güvenin sonuçları iklim modelinde çok daha büyük olacaktır. Dünyada hiçbir bilgisayar merkezi, iklim modellerinin büyük kümelerini çalıştırma gücüne sahip değildir. Yine de, bu tür deneyler dünyanın dört bir yanındaki evlerde bulunan PC'lerin veri işleme gücünü geri planda kullanarak olanaklı hale gelmektedir (bakınız www.climateprediction.net). Binlerce simülasyon tek bir modern iklim modelinde şaşırtıcı düzeyde büyük çeşitlilik olduğunu ortaya koymakta ve bu da gerçek dünya ikliminin geleceği konusundaki mevcut belirsizliğin en basit anlatımla çok büyük olduğunu göstermekte. Bu sonuçlar mevcut modelleri geliştirmeye katkı sağlıyor. Mevcut iklim modelleri kuşağının gerçekçi bir biçimde bölgesel ayrıntılara odaklanabildiği hakkında kanıt sağlayamıyor – bu ayrıntılar, elde edildiklerinde, kararlara destek sağlamakta büyük değer taşıyacak. Günümüz iklim modellerinin sınırlılıklarına yönelik samimi bir değerlendirme, yakın geçmişin verilerinde önemli düzeyde ısınmanın görüldüğüne ilişkin yaygın fikir birliği hakkında çok az kuşkuya yer bırakmakta.

Modellerimiz arasındaki mevcut çeşitlilik ne kadar geniştir? Bu, elbette, hangi model değişkenlerini incelediğinize bağlı. Gezegen çapındaki ortalama sıcaklık açısından tutarlı bir ısınma tablosu mevcut: çok sayıda küme üyesi, önceleri düşünüldüğünden çok daha fazla ısınma gösteriyor. Bölgesel ayrıntılar açısından küme üyeleri arasında büyük çeşitlilik söz konusu. Avrupa'nın tamamında aylık yağış oranı için bile karar desteği açısından tahminî yağı-

şın ne kadar yararlı olduğunu yorumlamak zor. Yalnızca elimizdeki en iyi tahminlerle iklim bağlamında karar verici çevreler için gerçekten de yararlı bilgiler içeren tahminleri birbirinden nasıl ayıracağız?

Gerçekte, karbondioksit düzeyleri ve diğer unsurlar sürekli değişiyor, hava ve iklim geçici bir deneyin tekil bir tezahürü halinde iç içe geçiyor. Hava tahmincileri genellikle küme "hava çekicisi" boyunca yayılmadan önce kümeden yararlı bilgiler çıkarmaya uğraşır haldeler; iklim modelleri oluşturanların eğer, örneğin, atmosferdeki karbondioksit miktarı ikiye katlanır ve ardından da sabitlenirse bu çekicinin yapısının nasıl değişeceği türünden zor sorulara yanıt aramaları gerekiyor. Lorenz bu alanda daha 1960'larda etkin araştırma yapıyor, yapısal istikrar konularıyla uzun süren geçici hallerin iklim tahminlerini nasıl karmaşık hale getirdiği hakkında uyarılarda bulunuyor, bu etkileri III. Bölüm'de tanımladığımız haritalardan çok daha karmaşık olmayan dizgelerde örnekliyordu.

Hava modellerimizin kusursuz olmadıkları dikkate alındığında, bunların oluşturduğu kümeler de aslında gerçekçi iklim dağılımları yönünde evrimleşmez. Ve Dünya iklim sisteminin özelliklerinin sürekli değiştiği dikkate alındığında, sürekli değişen, gözlemlenemez bir "gerçekçi iklim dağılımı"ndan söz etmek daha işin başında oldukça anlamsız. Böyle bir şey model ülkesi dışında var olabilir mi? Bunları söylesek de, kaosu ve doğrusal olmayan dinamiği anlamak, iklim çalışmalarının tasarımını ve uygulanmasını geliştirerek siyasa yapıcılara daha çok bilgiye dayalı karar desteği sağladı. Belki de en önemlisi zor kararların belirsizlik ortamında verilmesi gerekeceğini açığa çıkardı. Ne

belirsizliğin sıkı bir biçimde sınırlandırılmamış olduğu gerçeği ne de yalnızca kusursuzluktan uzak modellerle ölçülebileceği gerçeği eylemsizlik için bir bahane sağlıyor. Bütün zor siyasa kararları Burns etkisi bağlamında verilmektedir.

Ticarette kaos: Phynance için yeni fırsatlar

Çok sayıda insan açık kurallarla ama bilinmeyen dinamiklerle bir oyun oynuyorsa, beceriyle kazananları şanslarıyla kazananlardan ayırt etmek zordur. Bu, yatırım fonlarını yönetenleri değerlendirmek ve hava modelleri geliştirmek açısından temel bir sorun, zira geleneksel skorlar aslında kullanışlı bir olabilirlik taşıyan oyunu cezalandırabilir. PredCo adıyla bilinen Prediction Company, iktisadi pazarlarda tahmin yürütmek için nicel finansı yirmi yıl kadar önce ele geçiren doğrusal istatistik yöntemlerinden daha iyi yollar olması gerektiği önermesiyle kuruldu. PredCo, borsada meslek edinmek için lisansüstü eğitimlerinden vazgeçen, zamanın en parlak doğrusal olmayan dinamikçilerinin yanı sıra, Doyne Farmer ve Norm Packard'ın açtığı farklı bir yola koyuldu. Eğer pazarlarda kaos varsa, acaba başkaları raslantısızlık etkisi olmadan kandırılıyor olabilir miydi? Ne yazık ki, gizlilik anlaşmaları PredCo'nun kurulduğu günleri bile mumla aratıyor, ama şirketin kâr elde etme halinin sürekliliği her ne yapıyorlarsa iyi yaptıklarını göstermekte.

PredCo, Phynance'e –geleneksel anlamda istatistikçilerin alanına giren finansal tahmin sorunlarını ele almak üzere çok iyi eğitimli matematiksel fizikçileri bir araya ge-

tirmek uğraşı– doğru yapılmış genel hamlenin bir örneği. Hisse senedi piyasası kaotik midir? Mevcut kanıtlar pazarlara yönelik en iyi modellerimizin stokastik olduğunu göstermekte; bu nedenle yanıt “hayır”. Ama doğrusal da değil. Bir örnek vermek gerekirse, kaos çalışmaları hava ve ekonomi bağlamında hayranlık uyandırıcı gelişmelere katkı sağladı: birçok pazar hava koşullarından önemli ölçüde etkilenir – hatta bazıları hava tahmin raporlarından bile etkilenir. Birçok analizci raslantısallık tarafından kandırılmaktan o kadar korkar ki oldukça basit, tamamen stokastik modellere tutkuyla bağlıdır ve bazı küme hava tahminlerinin yararlı bilgiler içerdiği gerçeğini göz ardı eder. Enerji şirketleri açısından, hava koşulları hakkındaki bilgilerin belirsizliği “tahminin peşinden gitmek” –sırf gelecek Cuma gününe yönelik hava tahminlerinde sıcaklık bir inip bir çıktığı ve her inip çıkışında da gelecek Cuma gününün öngörülen elektrik talebini yükselttiği için pahalıya satın alıp düşük fiyata satmak, sonra da aynı metreküp doğal gazı yeniden yüksek fiyata satın almak– riskinden kaçınmak üzere günlük periyotta kullanılır. Bu, gerçek spekülatörleri bir sonraki tahmini tahmin edecek yöntemler aramaya yönlendirdi.

Kaos çalışmaları, kısa vadeli kârın ötesinde verimliliğe giden yolu açar. Phynance havayla bağlantılı olarak talep miktarı değişen bozulabilir malların dağıtımı, tren ve kamyon taşımacılığı ve hava tahminine dönük genel talep gibi konulara önemli katkı verir. Rüzgâr ve yağmurdaki kaotik dalgalanmalara dair daha iyi olabilirlik taşıyan tahminler, yenilenebilir enerjiyi kullanma yeteneğimizi artırabilir, fosil yakıt kullanan jeneratörlerimizin gerçekten de tahmin

edilebilirliğin düşük olduğu günler dışında "bekleme" konumunda çalıştırılması gereksinimini azaltabilir.

Daha basit bir gerçekliğe doğru geri çekilmek

Kaotik dinamik dizgelerinin incelenmesi fiziksel dizgelerden etkilendi; Laplace'ın şeytanının 21. yüzyıldaki enkarnasyonunun elindeki kusursuz modelle kaotik dizgelerin açıklanabilir olabilirlik taşıyan tahminleri nasıl gerçekleştirebileceğini artık anlıyoruz. İster tamamen veriye dayalı olsun, ister günümüzün "Doğa Yasaları"ndan türetilmiş olsun, elimizdeki modeller kusursuz değil. Hem gözlemsel belirsizlik hem de model yetersizliğiyle yetinmek zorundayız. Gerçek dünyaya ilişkin bir küme tahminini sanki kusursuz bir dizgenin matematiksel dizgesinin olabilirlik taşıyan tahminiymiş gibi yorumlamak, tahmin gaflarının en barizini yapmaktır. Kaosun tahminlerimize nihai sınır koyduğu tek bir gerçek dünya dizgesi bulabilir miyiz?

Dünya atmosferi/okyanus sistemi tahmin açısından çetin ceviz; fizikçiler tamamen matematiksel modellere geri çekilmekten kaçınmak için tahmin yordamlarını ve tahmin edilebilirlik kuramlarını üzerinde sınamak amacıyla daha basit fiziksel dizgeleri inceliyor. Dünya atmosferinden başlayıp en son mevziye uzanan bu geri çekilmenin izlerini takip edip ayrıntılarda nelerin yattığını inceleyeceğiz. Lorenz, Raymond Hide'ın 1960'larda bilgisayar simülasyonlarının kaotik yorumlarını desteklemek amacıyla gerçekleştirdiği "bulaşık leğeni" adlı laboratuvar deneylerine dikkatleri çeker. Bu deneylerin çocukları bugün

hâlâ veriye dayalı biçimde yeniden yapılandırılmaları için hammaddesini Peter Read'in sağladığı Oxford Üniversitesi Fizik Bölümü'nü arşınlıyor. Şimdiye kadar bu akışkan dizgelerin olabilirlik taşıyan tahminleri kusursuzdan uzak olmayı sürdürdü. Dünyanın dört bir yanında, deneyselciler, akışkan dizgelerden ve fiziksel modellerin kaotik doğasınca tetiklenen mekanik dizgelerden değerli veriler elde etti. Gerçek sarkaçlar sürtünmeyle ısınmakta, veriye dayalı modellerin alışık olduğu durum uzamı bölgelerini terk ederek simülasyon modellerinin "sabit" parametrelerini değiştirmektedir. Zarlar bile her atıldıklarına yıpranmaktadır. Gerçek dünyanın doğası da böyledir.

Çokça veri, düşük düzeyde gözlemsel gürültü ve fiziksel açıdan sabit koşullar sağlayan fiziksel dizgeler, modern, doğrusal olmayan veri analizinin gereçleri açısından uygun olabilir. Ekosistemler ilk akla gelenlerdir. Hızlı, temiz ve doğru yapılandırılmış lazerler zengin kaynaklar olduklarını kanıtladı, ama bu noktada ya da helyum gibi daha egzotik akışkanların dinamiklerinin incelenmesinde açıklanabilir tahmin modellerimiz yok. En son çare olarak elektronik devreler söz konusu: basit analog bilgisayarlar. Bu dizgelerin başarılı küme tahminlerini rapor eden bir makale, çok basit bir dizgeyi ele almasından ötürü büyük olasılıkla profesörlerden oluşan hakemler kurulunca reddedilecektir. Gerçek dünya dizgelerinin bu en basitleri için açıklanabilir tahminler üretmeyi başaramadığımızda öğrendiklerimiz ise çok daha fazla. Şekil 30'da, Moore-Spiegel dizgesini taklit için oluşturulmuş bir devrede gözlenen voltajların küme tahminleri verilmekte. Her bir panelde koyu siyah çizgi devre tarafından üretilen hedef gözlemleri gösterirken,

açık renk her bir çizgi de bir küme üyesi. Tahminler zamanın sıfıra eşit olduğu anda başlamakta; küme yalnızca bu zamandan önce alınan tahminler kullanılarak oluşturuldu. Üstteki iki panel Model Bir'den alınan sonuçları gösterirken, alttaki iki panel Model İki'den alınanları gösteriyor. Her iki modele ait eşzamanlı tahminleri gösteren soldaki panellere bakın. Model Bir topluluğunun her bir üyesi, üst panelde gösterildiği gibi, zaman 100 olmadan hemen önce hiçbir uyarıda bulunmadan gerçeklikten uzaklaşmakta; alt paneldeki Model İki topluluğu tam da doğru zamanda (yoksa bir parça erken mi?) yayılmayı başarmakta ve bu topluluğun çeşitliliği tahminin sonuna kadar elverişli kalmayı sürdürür görünmekte. Bu durumda modellerden hangisinin doğru çıkacağını bilemeyebiliriz, ama birbirlerinden güçlü bir biçimde sapmaya ne zaman başladıklarını görebiliriz. Sağdaki panellerde her iki model de yaklaşık olarak aynı zamanda, yaklaşık olarak aynı biçimde uzaklaşmakta.

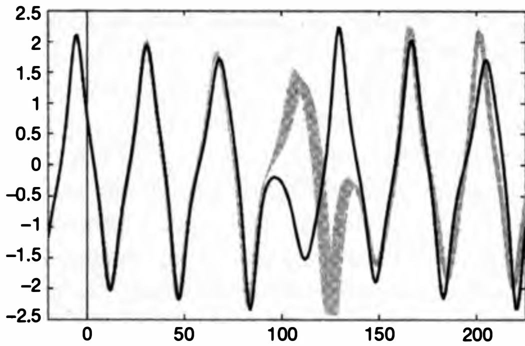
Farklı başlangıç koşullarından elde edilmiş birçok tahminin analizi gösteriyor ki, olabilirlik taşıyan tahminler olarak yorumlandıklarında, bu kümeler açıklanabilir değildir. Bu da gerçek dünya dizgelerini tahmin etmek için kaotik matematiksel modeller kullanıldığında genel bir sonuç gibi görünüyor. Neyse ki, amaca uygunluk, olabilirlik taşıyan yararlı tahminler çıkarsamayı gerektirmiyor.

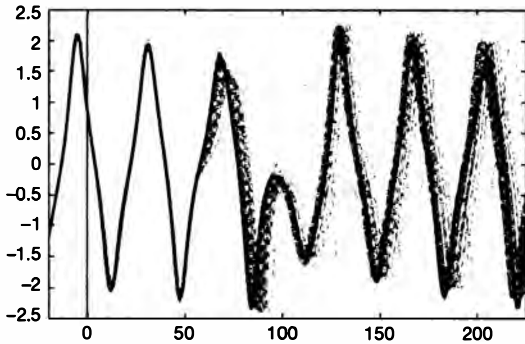
Olasılık: modellerimizi gerçekten de o kadar ciddiye almalı mıyız?

Akademik düzeydeki matematikte olasılıklar ve olabilirlikler aşağı yukarı aynı şeydir. Gerçek dünyada ise öyle

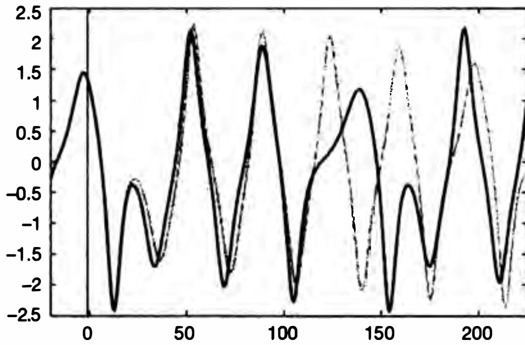
değildir. Eğer olası her bir olayın olabilirliğini toplarsak, olabilirliklerin toplamının bir olması gerekir. Ardından, her bir olasılık seti için, bir olaya ilişkin olasılık yoluyla o olayın *içerimlenmiş olabilirliğini* tanımlayabiliriz. Eğer içerimlenmiş olabilirliklerin toplamı bire eşitse, bu olasılıklar seti de *olabilirlik taşıyan olasılıklar* adını alır. Matematik dersleri dışında, olabilir olasılıları gerçek dünyada bulmak çok zordur. Olasılıklar sabit olduğu ve insanın elinde bir bahisteki iki taraftan birini seçme olanağı bulunduğunda, söz konusu "adil olasılıklar" kavramı, fildişi kuledeki "temenniyi" yansıtır; olmama olasılığından türeyen içerimlenmiş olasılıkları olma olasılığından türeyenlere tamamlamaz. Her iki kavramın temelinde yatan karışıklık, büyük ölçüde, matematiksel dizgeler ile bu dizgelerin model aldığı gerçek dünya dizgeleri arasındaki ayrımın açıklanamamasından kaynaklanır. Yarış pistinde ya da bir kumarhanede içerimlenmiş olabilirlikler toplamı birden fazladır. Bir Avrupa rulet çarkı 37/36 değerini verirken, Amerikan çarkının değeri 38/36'dır. Bir kumarhanede bu fazlalık kârı garantiler; bilimsel açıdan, bu fazlalığı model yetersizliğini göstermek için kullanabiliriz.

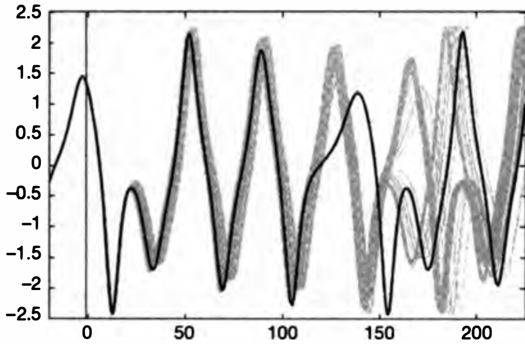
Model yetersizliğinin bizleri olabilirlik tahminlerinden uzaklaştırması, başlangıç koşulundaki belirsizliğin bizi doğrusal olmayan modellerdeki en az kare prensibinden uzaklaştırmasından farklı değildir. Beklenen faydayı –ya da bir bakıma kullananın hedefini– maksimize ederek olabilirlik tahmin dizgelerini bir karar destek mekanizmasıyla birleştirmek sağlam temellere oturur. Bu bağlamda, bu biçimde kullanılmayacak bir "olabilirlik tahmini"ne belki de olabilirlik tahmini bile dememek gerekir. Karar desteği için ola-





30. Machet'nin Moore-Spiegel Devresi'nin küme tahminleri. Koyu çizgi gözlemleri gösterir; açık renk çizgi küme üyeleridir ve tahmin sıfır zamanda başlar. Soldaki iki panel aynı veriler için gerçekleştirilen ama iki farklı modelden alınan küme tahminlerini göstermektedir; alt paneldeki küme devreyi yakalamayı başarırken, üst paneldeki model bunu zaman 100 civarındayken yitirir. Bu iki model için ikinci bir başlangıç koşuluna ait tahminler sağdaki iki panelde gösterilmektedir; burada, her iki modeldeki küme de yaklaşık olarak aynı zamanda uzaklaşır.





bilirlikler yerine olasılıklar sağlayan bir tahmin dizgelerini birleştirme kuramı, hiç kuşkusuz, oluşturulabilir. Judd işe yarayan birkaç örneği bize sağlamaktadır.

Görünüşe bakılırsa, modellerimizin yetersizliğini kabul etmek ve bu arada rekabet halindeki diğer modellerin yetersizliğinden habersiz olmak, adil olasılıklardan daha

başka bir şeyi hedeflememizi gerektirir. Eğer bir olasılık kestirim dizgesi kayıplarını karşılayabiliyorsa –işletme masraflarını karşılamanın yanı sıra bütün paydaşlar açısından hesaplandığında denk çıkıyorsa–, o zaman, bu dizgenin *sürdürülebilir olasılıklar* ürettiğini söyleyebiliriz. Sürdürülebilir olasılıklar da felaketle sonuçlanmayan (şimdiye kadar hiç felaketle sonuçlanmadı), daha fazla pazar payı elde etmek ya da işletme masraflarını karşılamak için bu olasılıları geliştirmek amacıyla daha fazla yatırım yapma arzusunu canlandırmayan bir karar desteği sağlayacaktır.

Örnekleri çoğaltılabilecek her tür küme alternatifi, sürdürülebilir olasılıkların yolunu açarak çok modelli kümelerdeki çeşitliliğin model yetersizliğine bağlı etkiyi tahmin etmesini sağlayabilir. İçerimlenmiş olabilirliklerimizin vardığı düzey, model yetersizliğini sayıya dökmek için bir yol sağlar. Gerçek dünya dizgelerinden bazılarını gitgide daha iyi anladıkça, insan acaba olasılık tahminlerimizin içerimlenmiş olabilirliklerinin toplamı *herhangi* bir fiziksel dizge açısından olur da bire denk düşer mi diye merak ediyor.

Olabilirliklerden ziyade olasılıklar sağlayan tahmin dizgelerine doğru ilerlemek, gerçek dünyaya ilişkin karar desteğimizi yalnızca matematiksel dizgelerimiz içinde gerektiği gibi tanımlanabilecek olabilirliklerden kaynaklanan kısıtlamalardan kurtarır. Sürdürülebilir olasılıkların hem modelimizin niteliğine hem de karşı tarafın modelinin niteliğine bağlı olması tuhaf ama kaçınılmaz bir gerçektir. Açıklanabilir olabilirlik tahminleri mevcut olsaydı, karar vermek kolay olurdu, ama model çeşitliliği (karara uygun) bir olabilirliğe dönüştürülemediğinde, elimizde olabilirlik

tahminleri olmaz. Risk yönetimini sanki tek derdimiz olup biteni basitleştirmekmiş gibi sürdürmek büyük çılgınlık. Peki, olasılıklar saatlik ya da günlük karar verme anlarında yararlı olabilirken, yalnızca tek bir başat etki sahibi olayın vuku bulduğu ve bu yolla ders alabileceğimiz benzer durumların bulunmadığı iklim değişikliği senaryolarında ne yapacağız?

Gerçek dünyada bilimsel tahmin yürütmek adını verdiğimiz şeyin nihai sınırına ulaştık. Olabilirliğin eski maden damarı gitgide inceliyor ve bir dahaki sefere ne yönde kazmamız gerektiği açık değil. Kaotik dinamik dizgeler bize yeni bir kürek temin etmiyorsa da, hiç olmazsa tehlikeleri sezelim diye, bir kanarya verdi.

XI. Bölüm

KAOSTA FELSEFE YAPMAK

Hesapladığınız her şeye inanmanız gerekmiyor.

Kaosta gerçekten de yeni olan bir şey var mı? Yaşamın oyun içindeki hakikatini tartışan üç beyzbol hakemi hakkında eski bir fıkra vardır. Birinci hakem, "Gerçekleri görür görmez söylerim," der. İkinci hakem, "Gerçekleri olduğu gibi söylerim," der. Nihayet, üçüncüsü, "Ben söyleyene kadar ortada bir gerçek yoktur," der. Kaos incelemeleri bizi üçüncü hakemin felsefî konumuna doğru zorluyor.

Kaosun zorlukları

Tahmin ettiğimiz nicelikler yalnızca bizim yapılandırdığımız tahmin modellerinde mi mevcut? Eğer öyleyse, onları gözlemlerimizle nasıl karşılaştıracağız? Bir tahmin bizim modelimizin durum uzamında yattığı halde buna denk

düşen gözlem bu durum uzamı içinde değilken, bu ikisi birbirinden "çıkarılabilir" mi? Bu, "elmalarla portakallar" probleminin matematiksel versiyonu: model durumu ile gözlem yeterince birbirine benziyor mu ki bir mesafeyi tanımlamak, ardından da tahmin hatasını adlandırmak için birini diğerinden anlamlı bir biçimde çıkarabiliyoruz? Yoksa benzemiyor mu? Benzemiyorsa nasıl ilerleyebiliriz?

Kaotik modellerin değerlendirilmesi, bilinmeyen değerler taşıyan, kusursuz, doğrusal olmayan modellerde bile ortaya çıkan ikinci bir temel zorluğu gözler önüne serdi: en iyi değerleri nasıl değerlendiriyoruz? Eğer model doğrusalsa, o zaman, elimizde uygulamada en iyi değerlerin hedef veri konusunda en yakın –burada en yakın kavramı en az kare anlamında tanımlanmakta (model ile hedef gözlemler arasındaki en küçük mesafe)– uzlaşmayı sağlayanlar olduğunu ikna edici biçimde gösteren birkaç yüzyıllık deneyim ve kuram var; olabilirlik maksimize edilmesi yararlı bir şey. Modelimiz doğrusal değilse, o zaman, yüzyıllara dayanan önsezimiz ilerleme karşısında bir engel olmasa da yanıltıcıdır. En az sayıdaki kareyi esas almak artık çok uygun değil ve "doğruluk" görüşünün de yeniden yorumlanması gerekiyor. Bu basit gerçek ihmal edildiği ölçüde önemli. Bu sorun Lojistik Denklem'de kolaylıkla örneklenmekte: doğru matematiksel formül ile gürültü modelinin ayrıntıları çan şekilli yayılım sergileyen raslantısal sayılar olsa bile, α'yı tahmin etmek için en az sayıda kareyi kullanmak sistematik hatalara yol açar. Bu, gereğinden az veri ya da yetersiz bilgisayar donanımı sorunu değil; başarısız olan modelin kendisi. Optimal küçük kare hesabını yapabiliriz: α değeri bütün gürültü düzeylerinde gereğinden çok daha küçüktür. Prensibe

dayalı bu yaklaşım doğrusal olmayan modeller için geçerli değildir, çünkü küçük kare prensibinin ardındaki önermeler tekrar tekrar çan şekilli dağılımlar varsaymaktadır. Bu dağılımların şekli doğrusal modeller tarafından korunurken *doğrusal olmayan modeller çan şeklini çarpıtır*, en küçük kare prensibini uygulanamaz hale getirir. Uygulamada bu "dayanaksız doğrusal beklenti" sistematik olarak her bir gürültü düzeyindeki gerçek parametre değerini düşük tahmin eder. İklim modellerinin yakın tarihlerde (hatalı) yorumlanması, yine, benzer biçimdeki dayanaksız doğrusal beklentiden ötürü bocaladı. 21. yüzyıl şeytanımız α'yı çok doğru tahmin edebilir, ama bunu yapmak için en küçük kare yaklaşımını kullanmaz! (O, gölgelere bakar.)

Felsefeciler de fraktal çapraşıklığın doğadaki gerçek sayıların varlığını ortaya koyarak öncül nitelikli olanlardan yalnızca birkaçını görebilsek bile irrasyonel sayıların da varolduğunu kanıtlayıp kanıtlamayacağını merak etti. Tuhaf çekiciler doğrusal dinamik dizgelerden edinilemeyecek bu tür görüşleri destekleyen hiçbir şey sağlamaz. Öte yandan, kaos, değişkenleri hayranlık uyandırıcı bir biçimde ayrıntılarıyla tanımlamakta –eğer modellerimiz yeterince iyiyse– modellerimizi ve gözlemlerimizi kullanmamız için yeni bir yol önerir; bunu da görgül açıdan yeterli, doğrusal olmayan bir modelden alınan gölge boyunca uzanmış durumlar yoluyla gerçekleştirir. Modelimiz gözlemleri uzunca bir süre gölgeliyorsa, gölgeleyen durumların tamamı çok dar bir değerler yelpazesine denk düşecek, bu da sıcaklık derecesi gibi gözlemlenebilir değerlerin ötesine geçildiğinde bildik sıcaklık kavrayışımızın kifayet etmediği bir kesinlikle tanım yapmanın yolunu açacaktır. Elimize asla

irrasyonel bir sayı geçmez, ama görgül açıdan uygun bir model göreli bir doğruluk taşıyan bir tanım sağlayabilir, modeli üçüncü hakemin rolünden pek de farklı olmayan bir role yerleştirerek gözlemleri kullanabilir. Öyle olsa bile, sıcaklık derecesi ile bizim bir gürültü modeli yoluyla sıcaklık derecesine ilişkin gözlemlerimiz arasındaki geleneksel bağlantı, gölgeleyen yararlı yörüngelerin var olduğu gösterilene kadar güvenlidir ancak.

Bir diğer felsefî kararsızlık, uygulamada "en iyi" tahminin nasıl tanımlanacağı konusundan ileri geliyor. Olabilirlik taşıyan tahminler bir dağılım sağlamaktayken, doğrulama için kullandığımız hedef gözlem daima tek bir eylem olacaktır: tahmin dağılımı bir tahminden diğerine farklılık gösterdiğinde, karşımızda yepyeni bir "elmalar ve portakallar" problemi durmaktadır ve tahmin dağılımlarımızın tek birini bile dağılım olarak değerlendiremeyiz.

Modellerimizin başarısı bizi matematik yasalarının ilgilendiğimiz gerçek dünya yasalarını yönlendirdiği türünden mutluluk dolu bir düşünceyle uyutma eğilimindedir. Doğrusal modeller mutlu bir aile oluşturuyordu. Yanlış doğrusal model doğru doğrusal modele yakın olabilir ve öyle de görülebilir – doğrusal olmayan modeller için geçerli olamayacak bir anlamda. Yalnızca gözlemler varken kusursuz olmaktan uzak ve doğrusal olmayan bir modelin doğru modele "yakın" olduğunu görmek kolay değildir: uzun gölgelere olanak tanıdığını görebiliriz ama eğer bu iki modelin farklı çekicileri varsa –ve biz çok benzer matematiksel modellerin çekicilerinin çok farklı olabileceğini biliyoruz– açıklanabilir olabilirlik tahminleri üreten kümelerin nasıl oluşturulacağını *bilemeyiz*. Gerçek'in bir

tür "doğru" modelde içerilebileceğini varsayarak, doğrusal olmayan modellerimizin Gerçek'e nasıl yaklaşabileceğini yeniden gözden geçirmeliyiz. Böyle kusursuz bir modelin var olduğuna inanmak için hiçbir bilimsel nedenimiz yok. Felsefecimiz Gerçek'i arama yolculuğunda karşılaştığı bulanık meselelerden ayrılıp gerçekte kusursuz olmayan modeller derlemesinden başka bir şeyin var olmadığının belirtileri üzerinde düşünebilir. Fizikçimize nasıl bir öneride bulunabilir? Yeni bilgisayarların gücü düşünebildiğimiz her şey (başlangıçtaki koşullar, parametre değerleri, modeller, derleyiciler, bilgisayar mimarisi ve diğerleri) için kümeler üretmemize olanak verirse, ortaya çıkan dağılımları bilimsel açıdan nasıl yorumlarız? Ya da özellikle karmaşık çok yüksek çözünürlüklü bir modelden gelecek tek bir simülasyonun ardına saklanarak bu konulardan kaçınmanın saçmalığını nasıl gözler önüne sereriz?

Son olarak, dikkat ederseniz, yanlış modelle çalışırken yanlış soruyu sorabiliriz. La Tour'un iskambil oyununda kim kimdir? Bu soru, her bir oyuncunun yalnızca bir matematikçi ya da bir fizikçi veya bir istatistikçi ya da bir felsefeci olabileceği bir modeli, masada bu disiplinlerden her birinin bir temsilcisi olması gerektiğini varsayar. Belki, bu varsayım yanlıştır. Gerçek dünyanın bilim insanları olarak oyuncularımızın her biri her bir rolü üstlenemez mi?

Kanıtın yükü: kaotik denen şey nedir aslında?

Eğer kanıtın matematiksel standartlarından ayrılmazsak, çok az dizgenin kaotik olduğu kanıtlanabilir. Mate-

matiksel kaosun tanımı yalnızca matematiksel dizgelere uygulanabileceği için, fiziksel bir dizgenin kaotik –ya da hatta periyodik– olduğunu kanıtlamaya girişemeyiz. Yine de, matematiksel modelleri, onları kullanarak betimlediğimiz dizgelerle karıştırmadığımız sürece fiziksel dizgeleri kaotik ya da periyodik olarak betimlemek yararlıdır. Elimizde bir model olduğunda onun determinist mi yoksa stokastik mi olduğunu görebiliriz; ama determinist olduğunu öğrendikten sonra bile kaotik olduğunu kanıtlamak az şey sayılmaz. Lyapunov katsayılarını hesaplamak zor bir iştir ve bunu analitik biçimde yapabileceğimiz pek az dizge bulunmaktadır. 1963 Lorenz Dizgesi'nin dinamiklerinin kaotik olduğunu matematiksel açıdan kanıtlamak 40 yılımızı aldı; bu nedenle de hava durumu için kullanılanlar türünden daha karmaşık denklemler sorusu büyük olasılıkla bir süre daha yanıtsız kalacak.

Matematikçinin omuzladığı ispat yükünü ve onunla birlikte kaosun en bilinen anlamını bertaraf etmeden bir fiziksel dizgenin kaotik olduğu savını savunmayı umut edemeyiz. Yine de, eğer fiziksel bir dizgeye ilişkin en iyi modellerimiz kaotik gibi görünüyorsa, eğer deterministse, yinelenir gibi görünüyorsa ve küçük belirsizliklerin hızlı büyüdüğünü göstererek akla duyarlı bağımlılık fikrini getiriyorsa, o zaman, bu gerçekler bir fiziksel dizgenin kaotik olmasının taşıdığı anlama geçerli bir tanım getirir. Günün birinde bu özelliklere sahip olmayan fiziksel bir dizge için daha iyi bir betimleme bulabiliriz, ama bütün bilim dalları böyle işler. Bu bağlamda, hava kaotikken ekonomi kaotik değildir. Bu, eğer hava modelimize raslantısal sayı üreteci denen aleti takarsak gerçek havanın kaotik olduğuna

artık inanmadığımız anlamına mı gelir? Raslantısal sayı üretecini sonlu bilgisayarlı modelin hatalarını hesaplamak gibi mühendisvari bir amaçla kullanmak istediğimiz sürece, hayır. Benzer biçimde, bilgisayar modellerimize gerçek bir raslantısal sayı üreteci ekleyemememiz gerçeği sermaye piyasasını determinist saydığımız anlamını taşımaz. Kaos incelemeleri en iyi modellerimiz ile bu modellerin bilgisayar simülasyonlarını oluşturmanın en iyi yolu arasında ayrım yapmanın önemini gözler önüne serdi. Eğer model yapımız kusursuz değilse, determinist bir dizgeye ilişkin en iyi modellerimizin stokastik oldukları ortaya çıkabilir!

Belki de kaotik tahmin yürütmeden doğabilecek soruların en ilginci, dördüncü bir model oluşturma paradigmasına ilişkin yanıtsız bir sorudur: en iyi modelimizin gölgelemeyi başaramadığını görüyoruz, fizikçimizin determinist model oluşturma planlarına ya da istatistikçimizin standart stokastik planlarına göre bu modeli onarmanın hiçbir yolu olmadığını düşünüyoruz. Matematiksel kaosun daha fazla incelenmesi bize en azından fiziksel dizgeleri gölgeleyecek modellere erişim sağlayacak bir sentez önerebilir mi?

Gölgeler, kaos, gelecek

Gözlerimiz bir kez açıldı mı, dünyaya dair daha yeni bir bakış açısına geçiş yapabiliriz, ama o eski bakış açısına asla geri dönemeyiz.

A. Eddington (1927)

Matematik nihai bilimkurgudur. Matematikçiler –büyük bir mutlulukla– etkinliklerini bütün varsayımların

("hemen her zaman") geçerli olduğu alanlarla sınırlayabilirken, fizikçiler ve istatistikçiler ele alınması gereken veriler ve üzerinde düşünülmesi gereken kuramlar yoluyla dış dünyayla ilgilenmek zorunda. Matematikçiler ve bilim insanlarıyla konuşurken "kaos" gibi sözcükleri kullanacaksak, bu farkı aklımızda tutmalıyız; kaotik bir matematiksel dizge, bizim kaotik adını verdiğimiz bir fiziksel dizgeden farklı bir varlıktır, o kadar. Matematik kanıtlar; bilim yalnızca betimlemek için çabalar. Bu ayrımın farkına varamamak tartışmaları gereksiz yere hırçınlaştırıyor. Bu tartışmada iki taraf da "kazanmıyor" ve bir önceki nesil alanı yavaş yavaş terk ederken gelecek neslin bazı üyelerinin bir küme yaklaşımı benimsediklerini görmek de ilginç: çoklu modelleri ne seçiyor, ne de birleştiriyorlar; yalnızca onları *bir model olarak* benimseyip hep birlikte kullanıyorlar. Bir yarışmadaki hasımlar gibi oynamak yerine, fizikçimiz, matematikçimiz, istatistikçimiz ve felsefecimiz takım halinde çalışabilir mi?

Kaos incelemeleri hangi soruların mantık taşıdığını ve hangilerinin saçma olduğunu daha açık görmemize yardım eder: kaotik dinamiklerin incelenmesi, hedeflerimizden bazılarının doğrusal olmayan dizgelerin tuhaf özellikleri karşısında erişilemez olduğunu kabullenmeye zorladı bizi. Ve en iyi dünya modellerimizin –hava, ekonomi, salgınlar, beyin, Moore-Spiegel devresi, hatta dünyanın iklim sistemi için geliştirilen modeller– doğrusal olmadığı düşünüldüğünde, bunun ayırdına varmanın bilimin ötesinde anlamları var; bu anlamlar da karar destek mekanizmalarına ve siyasa oluşturmaya kadar uzanıyor. İdealde, kaos ile doğrusal olmayan dinamiklerin öğrettikleri, anlamsız olduğunu bildiği bir soru sorulduğunda bildiklerimizin mev-

cut sınırlarını açıklama ve mevcut bilgileri iletme gücüyle donanmış iklim modelcimizin imdadına koşacaktır. Modeldeki kusurlar siyasaya özgü bir olabilirlik tahmininin mevcut olmadığı anlamına gelse de, temelde yatan fiziksel sürecin daha iyi anlaşılması karar verici konumundakilere asırlardır yardım ediyor.

Bütün zor kararlar belirsizlik altında verilir; kaosu anlamak, daha iyi bir karar desteği sağlamamıza yardım etti. Bilgi açısından zengin hava kümelerinin kullanılmasının sağladığı kârlılık, pazarların ticaret alanlarından ulusal elektrik ağlarının kontrol odalarına kadar pek çok alanda belirsiz bilgilerin günlük kullanımına önayak olunca enerji sektöründe önemli ekonomik gelişmeler kaydedildi.

Kehanet zor zanaat; bilimin gelecekte hangi bağlamı benimseyeceği asla açık değil, ama kaosun hedef noktalarını değiştirmiş olması gerçeği onun bilim üzerindeki en kalıcı etkisi olabilir. Bu mesajın bilim eğitiminin başlarında verilmesi gerekir: belirsizliğin rolü ve matematiksel açıdan basit dizgelerin ortaya koyduğu zengin davranış çeşitliliği hâlâ büyük ölçüde anlaşılamamakta. Gözlemsel belirsizlik içinden çıkılmaz biçimde model hatasıyla birleşmiş durumda ve neyin iyi bir model olduğunu yeniden değerlendirmeye zorluyor bizi. Az sayıdaki kutuyu minimize etme tarzındaki eski hedefimizin yanlış yönlendirici olduğu ortaya çıktı ama onların yerine gölgeleri aramaya mı çıkacağız, alımlı davranışlara sahip bir model mi arayacağız, yoksa daha açıklanabilir olabilirlik tahminleri yapmanın peşinde mi koşacağız? Ulaştığımız yeni ve daha üstün konumdan bakınca hangi soruların mantıklı olduğunu, matematiksel fiziğin temel varsayımlarına ve olabilirlik kuramının uy-

gulamalarına meydan okuyabileceğini görebiliyoruz. Model oluşturmadaki başarısızlıklarımız mevcut seçenekler arasından doğru yanıtı seçemeyişimizden mi kaynaklanıyor yoksa sunacak hiçbir uygun seçenek yok mu? Görgül açıdan uygun olmayan modellerden gelen simülasyonları nasıl yorumlayacağız? Gerçek'in varlığı konusundaki kişisel inançlarımız ne olursa olsun, kaos bizleri Doğa'ya yaklaşmanın ne anlama geldiğini yeniden düşünmeye zorladı.

Kaos incelemeleri yeni gereçler sağladı: "temelde yatan denklemler"i bilmediğimizde bile tutarlı modeller verebilecek gecikme temelli yeniden yapılanmalar, dinamik dizgeleri nicel açıdan betimlemek için yeni istatistikler, belirsizliği tahmin etmek için yeni yöntemler, ayrıca modellerimiz, gözlemlerimiz ve gürültü arasındaki boşlukta köprü görevi üstlenecek gölgeler. Odak noktasını bağıntıdan bilgiye, doğruluktan açıklanabilirliğe, uygunsuz hataları yapay olarak en aza indirgemekten yararları artırmaya kaydırdı. Nesnel olabilirliğin konumu hakkındaki tartışmayı yeniden canlandırdı: operasyonel açıdan yararlı bir olabilirlik tahmini oluşturabilir miyiz, yoksa olabilirlik tahminleri olmadan olabilirlik bilgisini kullanmak için yeni, *ad hoc* yöntemler geliştirmeye mi zorlanıyoruz? Gerçek dünyanın geleceğindeki belirsizliğimizi mi tanımlıyoruz, yoksa modellerimizdeki çeşitliliği mi araştırıyoruz? Bilim kendi yetersizliğini araştırır; bilimde süreğen bir belirsizlikle uğraşmak bir zayıflık değil, güçlülük belirtisidir. Kaos –herhangi bir kusursuz model ya da nihai çözümler sağlamaksızın– dünyayı incelememiz için yepyeni malzemeler temin etti. Bilim parçalardan oluşan bir çalışmadır ve aralardaki dikişlerden bazıları da hava geçirir.

Matrix filminin başlarında, Morpheus, Eddington'ın bu bölümün başındaki sözlerini anımsatan bir konuşma yapar:

> Bu senin son şansın. Bunun ardından geriye dönüş yok. Mavi hapı alırsan öykü sona erer. Yatağında uyanırsın ve inanmak istediğin her ne ise ona inanırsın. Kırmızı hapı alırsan Harikalar Diyarı'nda kalırsın ve ben de sana tavşan deliğinin ne kadar derine gittiğini gösteririm. Unutma, benim sana önerdiğim şey hakikat. Daha fazlası değil.

Kaos işte o kırmızı hap.

SÖZLÜKÇE

Matematikçiler bir tür Fransız'a benzer; onlarla konuştuğunuzda söylediklerinizi kendi dillerine çevirirler ve o da kısa süre içinde tamamen farklı bir şeye dönüşür.

Goethe, *Goethe Der ki...*

Bu maddelerin kesin tanımlar sağlaması amaçlanmıyor; anlık bir referans amacıyla temel fikri yansıtmaları hedefleniyor. Bazı terimler matematikçiler (M), fizikçiler (F), bilgisayar bilimciler (B) ya da istatistikçiler (İ) tarafından kullanıldıklarında anlamın farklı nüanslarını taşır. Tanımlar ve tartışmalar www.lsecats.org adresindeki CATS Forum'da bulunabilir.

akış İçinde zamanın sürekli olduğu dinamik dizge.

ayırt edilemez durum Verili bir *gürültü* modeli söz konusu olduğunda, aslında, X ile gösterilen bir hedef yörünge tarafından üretilmiş gözlemleri ürettiği için göz ardı etmenin mümkün görünmediği nokta derleminin bir üyesi. Bu derleme X'in ayırt edilemez durumlarının seti adı verilir ve belirli bir gözlemler setiyle de ilişkisi yoktur.

Burns etkisi Eksik bilgi ve kusursuz olmayan modellerin mantıklı karar verme uğraşı sırasında yarattığı zorluğu içeren bir ifade.

çekici *Durum uzamı* içinde, başka bir durumlar derlemesinin ileri doğru yinelenirken gitgide yaklaştığı bir nokta ya da noktalar derlemi.

çekim merkezi Belirli bir *çekici* için, sonuçta ona yakınlaşacak bütün durumların derlemi.

çiftleme zamanı Başlangıçtaki bir belirsizliğin iki çarpan gücünde artması için geçen süre. Ortalama çiftleme zamanı tahmin edilebilirliğin bir ölçütüdür.

denklem Yeni bir durumu mevcut durum yoluyla belirleyen kural; bu tür matematiksel dinamik dizgelerde zaman yalnızca aralıklı (tamsayı) değerler alır ve bu nedenle de X'in değerler serileri X_i olarak adlandırılır – burada i genellikle zaman olarak adlandırılır.

determinist dinamik Başlangıç durumu yinelenme sırasında bütün gelecek durumları tanımlayan bir raslantısal sayı üretecine bağlı kalmadan yinelenebilen dinamik bir dizge.

doğrusal dinamik dizgeler İçinde çözümlerin toplamlarının da çözümler olduğu dinamik bir dizge; daha genel anlamda, çözümlerin üst üste konmasına izin veren bir dizge. (Teknik nedenlerle, "yalnızca doğrusal kurallar içerir" demek istemiyoruz.)

doğrusal olmayan Doğrusal olmayan her şey.

durum *Durum uzamı* içinde dizgenin mevcut koşulunu tamamen tanımlayan bir nokta.

durum uzamı Her bir noktanın dinamik bir dizgenin durumunu ya da koşulunu tamamen tanımladığı uzam.

duyarlı bağımlılık Zamana bağlı olarak yakınlardaki durumların hızlı, ortalama değerli türel ayrışması.

etkili üstel büyüme Sonsuz geleceğe ortalandığında ortalama olarak türel gibi görünebilecek ama uzun dönemler içinde oldukça yavaş büyüyebilen ve hatta daralabilen zaman içinde büyüme.

fraktal Bir özbenzeş noktalar derlemi ya da ilginç (örneğin, düz bir dizgiden ya da bir düzlemden daha ilginç) biçimde özbenzeş olan bir nesne. Genellikle, içinde yaşanılan uzamda fraktal bir setin sıfır oylum olması gerekir, zira iki boyutlu bir çizginin alanı ya da üç boyutlu bir yüzeyin oylumu yoktur.

gecikme temelli yeniden yapılandırma Ek durum değişkenlerine ait gözlemler yerine aynı değişkenin zaman gecikmeli değerlerinin yapılandırıldığı bir *model durum uzamı.*

geçici dinamik Rulet oyunundaki ya da Galton Kutusu veya GO Kutu'daki haliyle geçici davranış, zira sonunda top duracaktır. Bkz. *karmaşa.*

geometrik ortalama N sayıları çarpıp ardından ürünün N'inci kökünü alınca elde edilen sonuç.

gölgeleme (F) Bir dinamik dizge, izlenmesi umulan gözlemsel *gürültü*ye dair gözlemlerin yolunu açabilecek bir yörünge üretebildiğinde, o dinamik dizgenin bir gözlemler setini "gölgelediği" söylenir; bir gölge hem gürültü modeliyle hem de gözlemlerle tutarlı bir yörüngedir.

gölgeleme (M) Kusursuz düzeyde bilinip çok az fark içeren dinamiklere sahip iki model arasındaki ilişki; burada modellerden birinin diğer modelin yörünge-

sinin yakınlarına denk düşen bir yörünge izleyeceği kanıtlanabilir.

gözlemsel belirsizlik Dizgenin durumuna dair herhangi bir gözlemin kesin olmamasından kaynaklanan belirsizlikler; ölçüm hatası.

gürültü (dinamik) Dizgeye müdahale eden, dizgenin gelecekteki davranışını modelin determinist parçasının davranışından farklı kılan her şey.

gürültü (ölçüm) Gözlemsel belirsizlik; ölçmeye çalıştığımız "Gerçek" bir değerin var olduğu ve yinelenen girişimlerin bu değere yakın ama bu değerle aynı olmayan sayılar ürettiği görüşü. Kendi ölçümlerimizdeki bozukluklardan gürültüyü sorumlu tutarız.

gürültü modeli Gerçek gürültü kabul edilen her ne ise onu açıklama çabasında kullanılan, gürültünün matematiksel bir modeli.

hemen her (F) Hemen her.

hemen her (M) Bir şey %100 doğru olsa bile kimi durumlarda yanlış da olabileceği uyarısı için matematikte sık kullanılan bir ifade.

kaos (B) Kaotik bir matematiksel dizgeyi temsil etmeye çalışan bir bilgisayar programı. Uygulamada, dijital anlamda bilgisayara aktarılmış dinamik dizgeler periyodik bir döngüdedir ya da oraya doğru ilerlemektedir.

kaos (F) Halihazırda, en iyi, kaotik bir matematiksel dizge tarafından modeli oluşturulabileceğine inandığımız bir fiziksel dizge.

kaos (M) (a) Determinist, (b) yinelenen ve (c) başlangıç durumunda duyarlı bağımlılık gösteren bir matematiksel dinamik dizge.

kaotik çekici Dinamiklerin üzerinde kaotik oldukları bir çekici. Bir kaotik çekici bir *fraktal geometri* ihtiva edebilir de etmeyebilir de; bu nedenle *tuhaf* kaotik çekicilerin yanı sıra tuhaf olmayan kaotik çekiciler bulunmaktadır.

karmaşa Yalnızca sınırlı bir zaman diliminde kaosu andıran nitelikler sergileyen (ve bu nedenle de yinelenme özelliği olmayan) *geçici dinamik.*

kelebek etkisi Mevcut küçük farklılıkların gelecekte büyük farklılıklarla sonuçlanabileceği fikrini içeren bir ifade.

kestirim Bir dizgenin gelecek durumu hakkında bir ifade.

korunumlu dinamik dizgeler İleri doğru yinelendikçe *durum uzam*ın bir oylumunun daralmadığı dinamik dizge. Bu dizgelerde *çekici* olamaz.

Kusursuz Model Senaryosu (KMS) Mevcut modeli veriler üretmek için kullanıp ardından bunu yaptığımızı unutmuş gibi yaparak modelimizi ve gereçlerimizi kullanmak yoluyla "veri"yi analiz ettiğimiz yararlı bir matematiksel el çabukluğu. Daha genel anlamda, incelemekte olduğumuz dizgenin matematiksel yapısının kusursuz bir modeline sahip olduğumuz her türlü durum.

küme tahmini Birtakım ileri yönelimli başlangıç durumlarının (bunlar farklı parametreler ve hatta modeller içerebilir) yinelenmesine dayanan ve bunu yaparak da model(ler)imizin çeşitliliğini sergileyen ve modele dayalı tahminlerde belirsizliğin olası etkileri üzerine daha düşük bir sınır getiren bir tahmin.

Lyapunov katsayısı *Sonsuz ölçüde* yakın durumların ayrıldığı ortalama hızın bir ölçütü. Katsayı adı verilmesi-

nin nedeni, ortalama hızın logaritması olmasıdır ve bu da ortalama üstel büyümeyi (sıfırdan büyük) ortalama üstel daralmadan (negatif) ayırt etmeyi kolaylaştırır. Dikkat edilirse, üstelden daha yavaş büyüme, üstelden daha yavaş daralma ve hiç büyümeme durumları tek bir değerde (sıfır) derlenmektedir.

Lyapunov zamanı *Lyapunov katsayısı* tarafından bölünen bu sayının en basit kaotik dizgeler dışında herhangi bir şeyin olabilirliği ile pek az ilişkisi vardır.

model Ya kendi dinamiklerinden ya da dinamiklerinin bir fiziksel dizgenin dinamiklerini anımsatmasından ötürü etker özellikli bir matematiksel dinamik dizge.

olası Kesin tanımlanmış olmayan her şey; belirsizliğe olanak tanıyan ifadeler.

örnek istatistik (İ) Bir örnek veriden tahminle çıkarılan bir istatistik (örneğin: ortalama, değişke, ortalama *çiftleme zamanı* ya da en büyük *Lyapunov katsayısı*).

parametreler Modellerimizde model alınan dizgenin belirli niteliklerini temsil edip tanımlayan nicelikler; model durumu ilerlerken parametreler genellikle sabit tutulur.

periyodik döngü Determinist bir dizgede kendi üzerine kapanan bir durumlar serisi; birinci durum sonuncuyu izler ve bu sonsuza kadar devam eder. Periyodik bir yörünge ya da sınır döngüsü.

Poincaré kesiti Bir *akış*ın, bir değişken belirli bir değer üstlendiğinde bütün değişkenlerin değerlerini kaydeden kesiti. Poincaré tarafından bir akışı bir *denkleme* dönüştürmek için geliştirildi.

raslantısal dinamik Gelecek durumu mevcut durum ta-

rafından belirlenmeyen dinamik. Stokastik dinamik olarak da adlandırılır.

sonsuz ölçüde küçük Aklınıza gelebilecek her türlü sayıdan daha küçük ama kesinlikle sıfırdan büyük bir nicelik.

stokastik dinamik Bkz. *raslantısal dinamik.*

tahmin edilebilirlik (F) Mevcut bilginin bir dizgenin gelecek durumu hakkında yararlı bir bilgi vermesini sağlayan özelliği.

tahmin edilebilirlik (M) Nihai (iklimbilimsel) dağılımdan edinilen raslantısal tahminlerden farklı olarak yararlı bir tahmin dağılımının oluşturulmasına olanak sağlayan özellik; çekicileri olan dizgelerde bu terim çekiciden noktaları rasgele toplamak yerine bir tahmin yapmak anlamını taşır.

tuhaf çekici *Fraktal* yapıda bir *çekici.* Bir tuhaf çekici kaotik olabilir de olmayabilir de.

üstel büyüme X'in artış hızının X'in değeriyle orantılı olduğu artış; X genişledikçe daha hızlı büyür.

yapıcı olmayan kanıt Bize bir şeyin var olduğunu, o şeyi nasıl bulacağımızı anlatmadan gösteren matematiksel bir kanıt.

yinelemek Bir dinamik *denklem*i tanımlayan kuralı bir kez uygulamak, durumu ileri doğru bir adım hareket ettirmek.

yinelenen yörünge Sonunda mevcut durumunun çok yakınına dönecek olan yörünge.

yitirgen dinamik dizge Ortalama olarak, *durum uzamı*nın bir oylumunun dizge altında ileri doğru yinelendiğinde daraldığı dinamik bir dizge. Oylum sıfıra doğru yol alır-

ken bir noktada daralması gerekmez ve oldukça karmaşık bir *çekici*ye de yaklaşabilir.

zaman serisi (M, F, İ) Bir dizgenin zaman içinde evrimleşmesini temsil etmek için alınmış bir gözlemler serisi; dokuz gezegenin konumu, güneş lekelerinin sayısı, fare nüfusu bunlara örnektir. Ayrıca, matematiksel bir modelin çıktısı. Ayrıca (S): Kafa karıştırıcı bir biçimde, modelin kendisi.

Kaos

LEONARD SMITH

Türkçesi: HAKAN GÜR

SORU HERKES İÇİN TANIDIK: BİR KELEBEĞİN KANATLARINI ÇIRPMASI DÜNYANIN ÖTE TARAFINDA BİR FIRTINA DOĞURUR MU? KAOS, BAZEN GÖZLE GÖRÜLEMEYECEK KADAR KÜÇÜK DEĞİŞİKLİKLERİN GELECEĞİN BİÇİMLENMESİNDE BAŞAT BİR ETKİYE SAHİP OLUP OLMADIĞIYLA İLGİLENİYOR. SEZGİSEL BİR İDEA OLDUĞU KADAR FİZİKSEL DÜNYANIN TÜM KURUCU YASALARINA SİNMİŞ BİR KAVRAM BURADA SÖZ KONUSU EDİLEN. ALANIN EN YETKİN İSİMLERİNDEN SMITH, HAVA TAHMİN TABLOLARINDAN KUMARHANELERDEKİ RULET MASALARINA DEK SAYISIZ OLASILIĞIN İÇE İÇE GEÇTİĞİ ONLARCA DURUMU ÇÖZÜMLÜYOR. BAŞTA MATEMATİK VE İSTATİSTİK OLMAK ÜZERE SON YILLARDA BİLİM DÜNYASININ EN HEYECAN UYANDIRICI KEŞİFLERİNE KAYNAKLIK EDEN BİR UZMANLIĞA HAS UZMANCA VE O ORANDA ÖZLÜ VE ANLAŞILIR BİR KILAVUZ.

Kültür Kitaplığı: 139; Bilim: 7



D